

第二章

內嵌式永磁同步電動機之數學模型與轉矩控制策略

2.1 前言

內嵌式永磁同步電動機是將永久磁鐵內嵌在轉子內部，機構上較表面黏著式永磁同步電動機(Surface-Mounted Permanent Magnet Synchronous Motor)有較堅固的機械結構，因此更適合高轉速之應用場合。由於內嵌磁鐵之安置結構，使磁路不同於表面黏著式永磁同步電動機，造成 d 軸與 q 軸電感量不同，因此內嵌式永磁同步電動機比表面黏著式永磁同步電動機轉矩多出額外的磁阻轉矩分量。

本章第二節首先推導內嵌式永磁同步電動機之數學模型。第三節則說明本篇論文所採用之內嵌式永磁同步機轉矩控制策略，內容包含磁場導向控制理論(Field Oriented Control)與單位電流最大轉矩(Maximum Torque Per Ampere)控制策略，第四節介紹負載轉矩估測器並模擬加載運作之結果。

2.2 內嵌式永磁同步機之數學模式導演[27]

內嵌式永磁同步機之數學模型包含電氣系統與機械系統兩

部分。在推導內嵌式永磁同步機數學模型之前，先假設以下基本條件：

1. 永磁同步機一次側為三相平衡繞組
2. 氣隙(Air Gap)中的磁動勢(MMF)為弦波分佈
3. 忽略鐵損(Core Loss)
4. 磁路無磁飽和(Magnetic Saturation)現象
5. 忽略繞線槽效應(Slot Effect)
6. 無阻尼繞組(Damper Winding)

圖 2.1 所示即為三相內嵌式永磁電動機示意圖，其中 a-axis、b-axis 及 c-axis 分別表示電動機定子 a、b、c 三相繞組之參考軸。d-axis、q-axis 為轉子座標之直、交參考軸，而 θ 為轉子直軸(d-axis)與 a 相繞組參考軸(a-axis)所形成的夾角， N 、 S 分別表示永久磁鐵之北極與南極。由於三相繞組之間彼此都有互感存在，而轉子永久磁鐵產生磁場亦會隨轉子運動在定子繞組產生磁通變化。因此，吾人可以利用耦合電感模型與法拉第定律推導內嵌式永磁同步電動機之電氣電路模型。假設定子繞組為三相 Y 接，則圖 2.1 之模型亦可以圖 2.2 之等效耦合電感與永久磁鐵與各繞組磁產生之磁交鏈表示之。其定子側電壓方程式，由克希荷夫電壓定律可表示成如下：

$$V_{as} = R_s i_{as} + \frac{d}{dt} \lambda_{as} \quad (2.1)$$

$$V_{bs} = R_s i_{bs} + \frac{d}{dt} \lambda_{bs} \quad (2.2)$$

$$V_{cs} = R_s i_{cs} + \frac{d}{dt} \lambda_{cs} \quad (2.3)$$

上式中 V_{ms} ， i_{ms} 及 λ_{ms} ， $m \in \{a, b, c\}$ 分別表示 m 相相電壓、相電流及相

磁交鏈，而 R_s 則為每相繞組之電阻。而吾人由各繞組間自感、互感及永久磁鐵與各相產生之磁通鏈可得到下列方程式：

$$\lambda_{as} = L_{aa}i_a + L_{ab}i_b + L_{ac}i_c + I_{af} \quad (2.4)$$

$$\lambda_{bs} = L_{ba}i_a + L_{bb}i_b + L_{bc}i_c + I_{bf} \quad (2.5)$$

$$\lambda_{cs} = L_{ca}i_a + L_{cb}i_b + L_{cc}i_c + I_{cf} \quad (2.6)$$

其中 L_{mm} 及 L_{mn} ， $m \in \{a, b, c\}$ ， $n \in \{a, b, c\}$ 分別表示各繞組之自感及之間之互感。 I_{mf} ， $m \in \{a, b, c\}$ 分別表示永久磁鐵磁場鏈接至各繞組之磁交鏈。

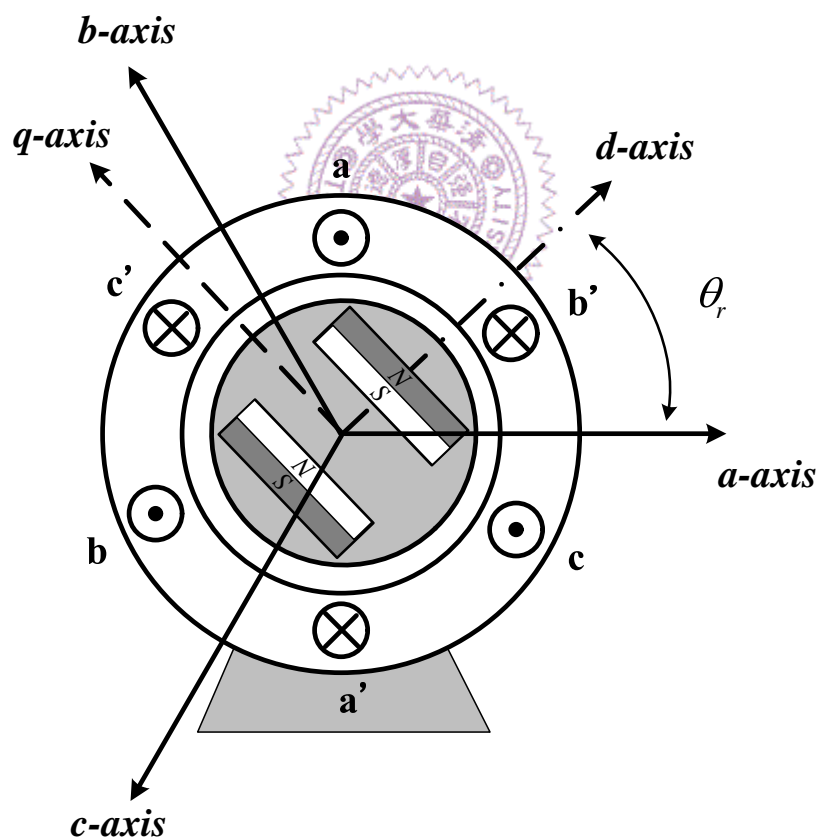


圖 2.1 理想三相內嵌式永磁同步電動機之結構示意圖

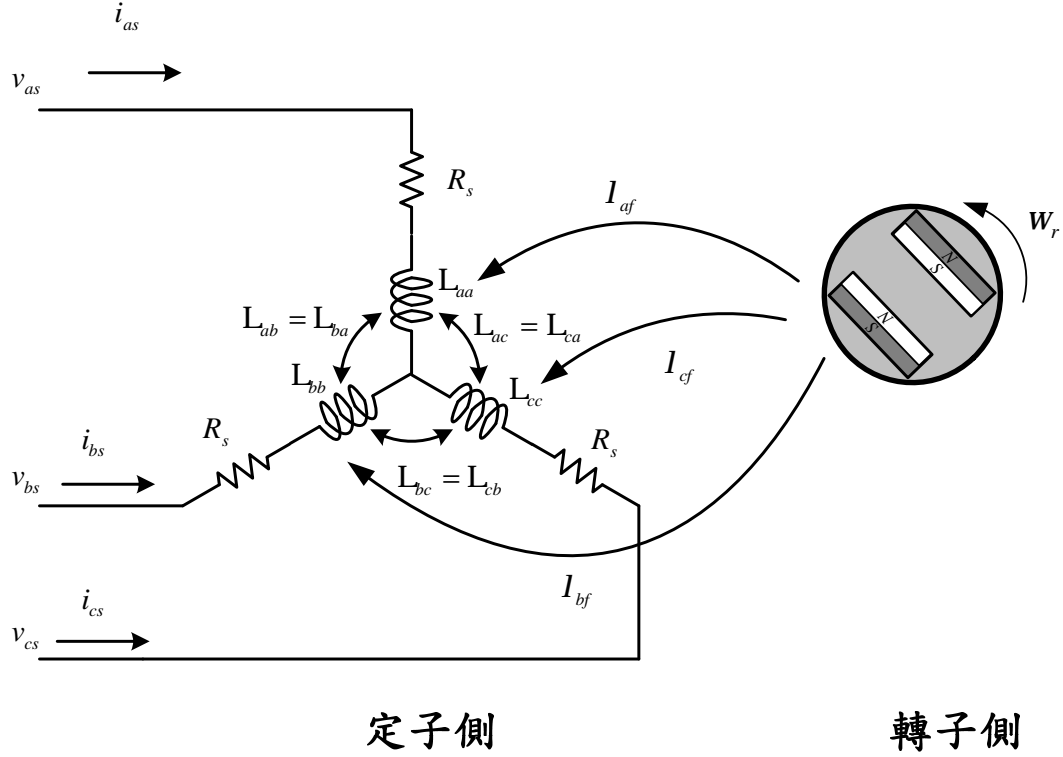


圖 2.2 理想三相內嵌式永磁同步電動機等效電路圖

接著，吾人將推導在定子側電壓方程式中的各電感參數：

1. 定子側各繞組之自感(L_{aa} 、 L_{bb} 及 L_{cc})：

以 a 相為例，只外加 i_a 電流，可求得 a 相之磁動勢 $F_a = N_s i_a$ ，其中 N_s 為每相繞組之有效匝數。如圖 2.3 所示，吾人將 a 相之磁動勢 F_a 投影至轉子之直軸和交軸，可獲得直軸及交軸之分量如下：

$$F_{da} = N_s i_{as} \cos q_r \quad (2.7)$$

$$F_{qa} = N_s i_{as} \cos(q_r + 90^\circ) = -N_s i_{as} \sin q_r \quad (2.8)$$

由於磁通量(Flux) f ，等於磁動勢與磁導(Permeance) P 之乘積，即表示如下：

$$f = MMF \times P \quad (2.9)$$

因此 a 相磁通量 f_a 在直交軸之各分量可表示如下：

$$f_{da} = F_{da} P_d = F_a \cos q_r P_d \quad (2.10)$$

$$f_{qa} = F_{qa} P_q = -F_a \sin q_r P_q \quad (2.11)$$

其中 P_d 及 P_q 分別為內嵌式永磁同步電動機之直軸及交軸磁導，與其幾何形狀及材料特性有關。

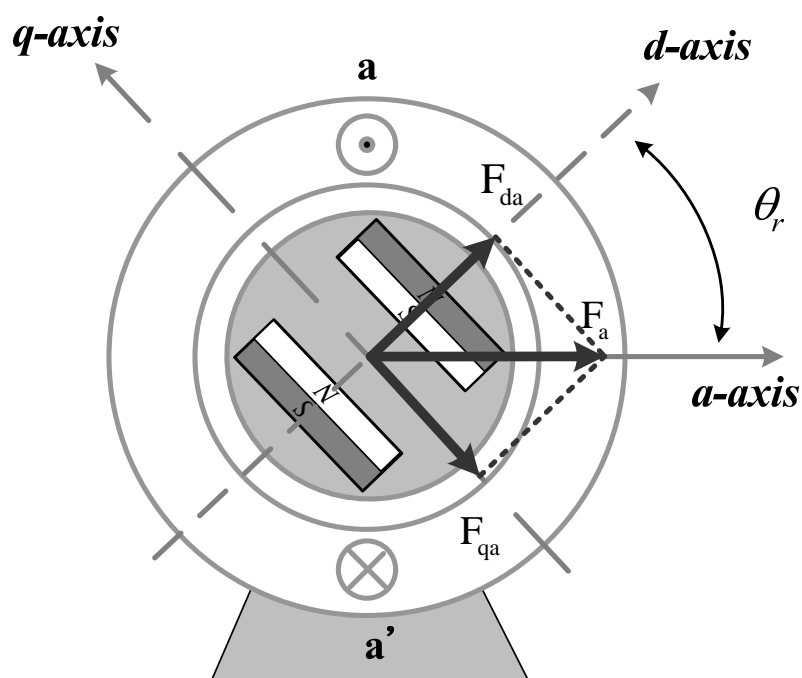


圖 2.3 F_a 投影至直交軸之示意圖

在(2.10)、(2.11)式中，吾人將 F_a 分解成二個直交軸分量來討論的好處是因為 P_d 及 P_q 為定值常數，變成與 q_r 無關。

由於先前所假設磁路無飽和現象，因此吾人可用重疊定理求出 f_a ：

$$f_a = f_{da} \cos q_r + f_{qa} \cos(q_r + 90^\circ)$$

$$\begin{aligned}
&= f_{da} \cos q_r - f_{qa} \sin q_r \\
&= F_a \cos^2 q_r P_d + F_a \sin^2 q_r P_q \\
&= F_a \left[\frac{1 + \cos 2q_r}{2} P_d + \frac{1 - \cos 2q_r}{2} P_q \right] \\
&= N_s i_a \left[\frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2q_r \right]
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其 a 相磁通鏈 I_a 為：

$$I_a = N_s f_a = N_s^2 i_a \left[\frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2q_r \right] \tag{2.13}$$

則 a 相自感 L_{aa} 為：

$$L_{aa} = \frac{I_a}{i_a} = N_s^2 \left[\frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2q_r \right] \tag{2.14}$$

$$\stackrel{\Delta}{=} L_1 + L_2 \cos 2q_r \tag{2.15}$$

上式中 $L_1 \triangleq N_s^2 \frac{P_d + P_q}{2}$, $L_2 \triangleq N_s^2 \frac{P_d - P_q}{2}$

同理可得 b 相及 c 相之各自感(L_{bb} 及 L_{cc})為：

$$L_{bb} = L_1 + L_2 \cos(2q_r + 120^\circ) \tag{2.16}$$

$$L_{cc} = L_1 + L_2 \cos(2q_r - 120^\circ) \tag{2.17}$$

由上述之結果可知，任一相的定子自感都含有 q_r 變數，且含有隨二倍轉子頻率變化之電感分量，此乃由於直軸與交軸磁路不同等所造成。

2. 定子側繞組間之互感(L_{ab} 、 L_{ac} 、 L_{ba} 、 L_{bc} 、 L_{ca} 及 L_{cb})：

以 a、b 相耦合為例，只輸入 i_a 電流，其鏈接至 b 相之磁通量 f_{ba} 為：

$$\begin{aligned}
 f_{ba} &= f_{da} \cos(q_r - 120^\circ) + f_{qa} \cos(q_r + 90^\circ - 120^\circ) \\
 &= f_{da} \cos(q_r - 120^\circ) - f_{qa} \sin(q_r - 120^\circ) \\
 &= N_s i_a [\cos(q_r - 120^\circ) \cos q_r P_d + \sin(q_r - 120^\circ) \sin q_r P_q] \\
 &= N_s i_a \left[-\frac{P_d + P_q}{4} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos(2q_r - 120^\circ) \right]
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

茲假設定子側三相有效繞組都相等， $N_{sa} = N_{sb} = N_{sc} = N_s$ ，則 I_b 為：

$$\begin{aligned}
 I_b &= N_{sb} f_{ba} \\
 &= N_s^2 i_a \left[-\frac{P_d + P_q}{4} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos(2q_r - 120^\circ) \right]
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

求得互感 L_{ba} 為：

$$\begin{aligned}
 L_{ba} &= \frac{I_b}{i_a} \\
 &= N_s^2 \left[-\frac{P_d + P_q}{4} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos(2q_r - 120^\circ) \right] \\
 &\triangleq -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos(2q_r - 120^\circ)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

同理，可推得 L_{ab} 、 L_{ac} 、 L_{bc} 、 L_{ca} 及 L_{cb} 如下：

$$L_{ab} = L_{ba} \tag{2.21}$$

$$L_{bc} = -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2q_r = L_{cb} \tag{2.22}$$

$$L_{ca} = -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos(2q_r + 120^\circ) = L_{ac} \tag{2.23}$$

3. 永久磁鐵鏈接至定子繞組之磁交鏈(I_{af} 、 I_{bf} 及 I_{cf})：

以 a 相為例，若轉子直軸與 a 相繞組之參考座標重疊時，a 相繞組所感應之磁交鏈為 I_f ，則永久磁鐵感應至 a 相之磁交鏈 I_{af} 之關係可由圖 2.4 推得 q_r 與 I_{af} 之定性關係。例如在 $q_r = 0^\circ$ 時，磁通鏈 I_{af} 達到最大值 I_f ，而在 $q_r = 90^\circ$ 時， $I_{af} = 0$ 。由先前所假設氣隙磁通分佈成弦波變化之條件，因此可得：

$$I_{af} = I_f \cos q_r \quad (2.24)$$

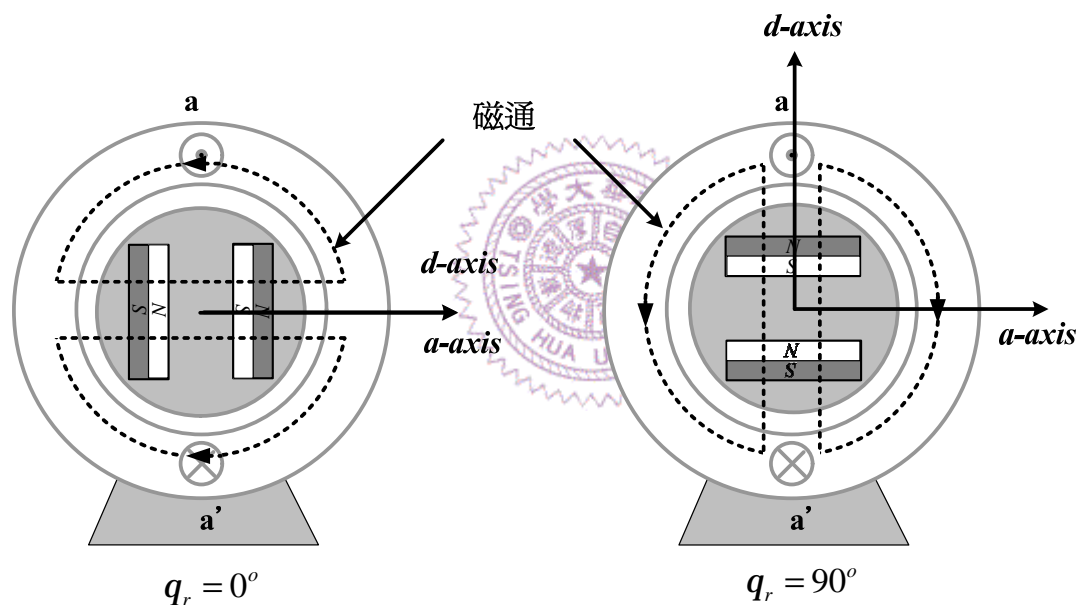


圖 2.4 永久磁鐵感應至 a 相繞組， q_r 位置與 I_{af} 之關係

同理，吾人可得永久磁鐵對 b 相及 c 相之磁交鏈(I_{bf} 及 I_{cf})為：

$$I_{bf} = I_f \cos(q_r - 120^\circ) \quad (2.25)$$

$$I_{cf} = I_f \cos(q_r + 120^\circ) \quad (2.26)$$

吾人將上述三項推導之結果以矩陣型式表示，可表示成：

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{L}] &\triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{aa} & \mathbf{L}_{ab} & \mathbf{L}_{ac} & \mathbf{I}_{af} \\ \mathbf{L}_{ba} & \mathbf{L}_{bb} & \mathbf{L}_{tb} & \mathbf{I}_{bf} \\ \mathbf{L}_{ta} & \mathbf{L}_{tb} & \mathbf{L}_{tc} & \mathbf{I}_{cf} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} L_\ell + L_1 + L_2 \cos 2q_r & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2q_r - 120^\circ) & & \\ -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2q_r - 120^\circ) & L_\ell + L_1 + L_2 \cos(2q_r + 120^\circ) & & \\ -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2q_r + 120^\circ) & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos 2q_r & & \\ & & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2q_r + 120^\circ) & \mathbf{I}_f \cos q_r \\ & & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos 2q_r & \mathbf{I}_f \cos(q_r - 120^\circ) \\ & & L_\ell + L_1 + L_2 \cos(2q_r - 120^\circ) & \mathbf{I}_f \cos(q_r + 120^\circ) \end{bmatrix} \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

其中

$$L_1 = N_s^2 \frac{\mathbf{P}_d + \mathbf{P}_q}{2}$$

$$L_2 = N_s^2 \frac{\mathbf{P}_d - \mathbf{P}_q}{2}$$

L_ℓ 為漏電感



則定子側電壓方程式(2.1)~(2.3)式與各相磁交鏈方程式(2.4)~(2.6)可改寫成：

$$\vec{v}_s^s = [v_{as} \quad v_{bs} \quad v_{cs}]^T + \frac{d}{dt} [I_{as} \quad I_{bs} \quad I_{cs}]^T \quad (2.28)$$

$$\vec{I}_s^s = [I_{as} \quad I_{bs} \quad I_{cs}]^T = [\mathbf{L}][i_{as} \quad i_{bs} \quad i_{cs}]^T \quad (2.29)$$

吾人為了方便控制器設計，茲須將定子電壓方程式轉至轉子參考座標，並且採用振幅不變轉換法(Amplitude Invariant Transform)。

由定子電流在靜止座標系統之空間向量(Space Vector)表示：

$$\vec{i}_s^s = \frac{2}{3}(i_{as} + ai_{bs} + a^2i_{cs}) \quad (2.30)$$

其中 $a = e^{j120^\circ}$ ， $a^2 = e^{-j120^\circ}$ ；吾人將(2.30)式兩邊乘 e^{-jq_r} 以將其轉至轉子座標，則：

$$\begin{aligned} \vec{i}_s^r &= \frac{2}{3}(i_{as} + ai_{bs} + a^2i_{cs})e^{-jq_r} \\ &= \frac{2}{3}(i_{as} + e^{j120^\circ}i_{bs} + e^{-j120^\circ}i_{cs})e^{-jq_r} \\ &= \frac{2}{3}(i_{as}e^{-jq_r} + e^{-j(q_r-120^\circ)}i_{bs} + e^{-j(q_r+120^\circ)}i_{cs}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

再將(2.31)式以直交軸型式表示，可表示成：

$$\begin{aligned} i_{ds}^r + ji_{qs}^r &= \frac{2}{3} \left[i_{as}(\cos q_r - j \sin q_r) + i_{bs}(\cos(q_r - 120^\circ) - j \sin(q_r - 120^\circ)) \right. \\ &\quad \left. + i_{cs}(\cos(q_r + 120^\circ) - j \sin(q_r + 120^\circ)) \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

吾人從(2.32)式之實數與虛數部份獲得兩個實數方程式：

$$\begin{cases} i_{ds}^r = \frac{2}{3} [i_{as} \cos q_r + i_{bs} \cos(q_r - 120^\circ) + i_{cs} \cos(q_r + 120^\circ)] \\ i_{qs}^r = \frac{2}{3} [-i_{as} \sin q_r - i_{bs} \sin(q_r - 120^\circ) - i_{cs} \sin(q_r + 120^\circ)] \end{cases} \quad (2.33)$$

假設該電動機為三相四線式，且考慮不平衡狀況時，吾人必須考慮下

式零相序電流成份：

$$i_{os} = \frac{1}{3}(i_{as} + i_{bs} + i_{cs}) \quad (2.34)$$

接著，吾人可將(2.33)~(2.34)式表示成矩陣型式如下：

$$\begin{bmatrix} i_{ds}^r \\ i_{qs}^r \\ i_{os}^r \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos q_r & \cos(q_r - 120^\circ) & \cos(q_r + 120^\circ) \\ -\sin q_r & -\sin(q_r - 120^\circ) & -\sin(q_r + 120^\circ) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

同理，定子 a、b、c 三相之磁通鏈空間向量表示式為：

$$\vec{I}_s^s = \frac{2}{3} (I_{as}^s + a I_{bs}^s + a^2 I_{cs}^s) \quad (2.36)$$

將(2.27)式代入(2.29)式，整理後可得：

$$\begin{aligned} \vec{I}_s^s &= \left(L_\ell + \frac{3}{2} L_1 \right) \vec{i}_s^s + L_2 i_{as} e^{j2q_r} + \frac{L_2 i_{bs}}{a} e^{j2q_r} + \frac{L_2 i_{cs}}{a^2} e^{j2q_r} + I_f e^{jq_r} \\ &= \left(L_\ell + \frac{3}{2} L_1 \right) \vec{i}_s^s + \frac{3}{2} L_2 e^{j2q_r} \frac{2}{3} (i_{as} + a^2 i_{bs} + a i_{cs}) + I_f e^{jq_r} \\ &= \left(L_\ell + \frac{3}{2} L_1 \right) \vec{i}_s^s + \frac{3}{2} L_2 e^{j2q_r} \vec{i}_s^{s*} + I_f e^{jq_r} \end{aligned} \quad (2.37)$$

上式中 $\vec{i}_s^{s*} = \frac{2}{3} (i_{as} + a^2 i_{bs} + a i_{cs})$ 。

吾人將(2.37)式兩邊同乘 e^{-jq_r} 以轉換至轉子座標，可得下列空間向量表示式：

$$\vec{I}_s^r = \left(L_\ell + \frac{3}{2} L_1 \right) \vec{i}_s^r + \frac{3}{2} L_2 \vec{i}_s^{r*} + I_f \quad (2.38)$$

上式中 $\vec{i}_s^r = e^{jq_r} \vec{i}_s^s$ 。

再將(2.38)式以實部與虛部分量表示為：

$$I_{ds}^r + jI_{qs}^r = \left(L_\ell + \frac{3}{2}L_1 \right) (i_{ds}^r + ji_{qs}^r) + \frac{3}{2}L_2 (i_{ds}^r - ji_{qs}^r) + I_f \quad (2.39)$$

可進一步從(2.39)式之實數與虛數部份分別得到以下二式：

$$I_{ds}^r = L_{ds} i_{ds}^r + I_f \quad (2.40)$$

$$I_{qs}^r = L_{qs} i_{qs}^r \quad (2.41)$$

其中

$$L_{ds} \triangleq L_\ell + \frac{3}{2}(L_1 + L_2) \quad \text{稱為直軸等效電感}$$

$$L_{qs} \triangleq L_\ell + \frac{3}{2}(L_1 - L_2) \quad \text{稱為交軸等效電感}$$

為完整起見，吾人亦可考慮零相序成份如下：

$$I_{os}^e = L_\ell i_{os} \triangleq L_{os} i_{os} \quad (2.42)$$

上式中 L_{os} 稱為零相序等效電感。

同理可將(2.1)~(2.3)式表示成空間向量：

$$\vec{v}_s^s = R_s \vec{i}_s^s + \frac{d}{dt} \vec{I}_s^s \quad (2.43)$$

接著，再將(2.43)式兩邊同乘 e^{-jq_r} 以轉換至轉子座標：

$$\vec{v}_s^r = R_s \vec{i}_s^r + \frac{d}{dt} \vec{I}_s^r + jw_r \vec{I}_s^r \quad (2.44)$$

其中 w_r 為轉子電器角速度；然後再將(2.44)式分成實數、虛數部份，表示成果直、交軸座標分量：

$$v_{ds}^r = R_s i_{ds}^r + \frac{d}{dt} I_{ds}^r - w_r I_{qs}^r \quad (2.45)$$

$$v_{qs}^r = R_s i_{qs}^r + \frac{d}{dt} I_{qs}^r + w_r I_{ds}^r \quad (2.46)$$

若考慮零相序電壓成分如下：

$$v_{os} = R_s i_{os} + \frac{d}{dt} I_{os} \quad (2.47)$$

則此電動機之輸入總電功率為：

$$\begin{aligned} P_{in} &= v_{as} i_{as} + v_{bs} i_{bs} + v_{cs} i_{cs} \\ &= \frac{3}{2} (v_{ds}^r i_{ds}^r + v_{qs}^r i_{qs}^r) + 3 v_{os} i_{os} \end{aligned} \quad (2.48)$$

由於本論文內所採用一三相平衡系統，所以吾人將(2.48)式變成：

$$P_{in} = \frac{3}{2} (v_{ds}^r i_{ds}^r + v_{qs}^r i_{qs}^r) \quad (2.49)$$

再將(2.40)、(2.41)式與(2.45)式及(2.46)式代入(2.49)式可得以下結果：

$$\begin{aligned} P_{in} &= \frac{3}{2} \left[\left(R_s i_{ds}^r + \frac{d}{dt} I_{ds}^r - w_e I_{qs}^r \right) i_{ds}^r + \left(R_s i_{qs}^r + \frac{d}{dt} I_{qs}^r + w_e I_{ds}^r \right) i_{qs}^r \right] \\ &= \frac{3}{2} \left[R_s (i_{ds}^{r^2} + i_{qs}^{r^2}) + \frac{1}{2} \left(L_{ds} \frac{d}{dt} i_{ds}^{r^2} + L_{qs} \frac{d}{dt} i_{qs}^{r^2} \right) + w_r (I_{ds}^r i_{qs}^r - I_{qs}^r i_{ds}^r) \right] \end{aligned} \quad (2.50)$$

由上式可觀察到輸入至電動機的功率轉換為下列各種形式：

$$\text{定子銅損} : \frac{3}{2} R_s (i_{ds}^r{}^2 + i_{qs}^r{}^2) \quad (2.51)$$

$$\text{儲存至磁場中的能量} : \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left(L_{ds} \frac{d}{dt} i_{ds}^r{}^2 + L_{qs} \frac{d}{dt} i_{qs}^r{}^2 \right) \quad (2.52)$$

$$\text{電動機產生之機械功率} : \frac{3}{2} w_r (I_{ds}^r i_{qs}^r - I_{qs}^r i_{ds}^r) \quad (2.53)$$

若將(2.53)式中轉子轉速由電氣角速度轉換成機械角速度，則電動機產生之機械功率可改寫為下式：

$$\frac{3}{2} \frac{P}{2} w_m (I_{ds}^r i_{qs}^r - I_{qs}^r i_{ds}^r) \quad (2.54)$$

上式中 P 為電動機之極數， w_m 為轉子機械角速度；電動機所產生之機械功率亦可寫為下式：

$$P_{out} = T_e \times w_m \quad (2.55)$$

上式中 T_e 為電動機產生之電磁轉矩， P_{out} 為電動機所產生之機械功率。因此吾人可由(2.54)及(2.55)式得到電動機產生之電磁轉矩：

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} (I_{ds}^r i_{qs}^r - I_{qs}^r i_{ds}^r) \quad (2.56)$$

若將(2.40)、(2.41)式代入(2.56)式，吾人可得另一種表示式如下：

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} (I_f i_{qs}^r + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^r i_{qs}^r) \quad (2.57)$$

由(2.57)式可知，內嵌式永磁同步電動機所產生之電磁轉矩可以由 i_{ds}^r 與 i_{qs}^r 控制，若電磁轉矩採用 $i_{ds}^r = 0$ 控制策略，則(2.57)式可以寫為：

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} I_f i_{qs}^r \quad (2.58)$$

因此內嵌式永磁同步電動機之電磁轉矩可直接由 i_{qs}^r 控制。

將(2.40)與(2.41)式分別帶入(2.45)式及(2.46)式，可得到內嵌式永磁同步電動機於轉子座標下直軸、交軸之電氣方程式如下：

$$v_{ds}^r = R_s i_{ds}^r + L_{ds} \frac{d}{dt} i_{ds}^r - \omega_r L_{qs} i_{qs}^r \quad (2.59)$$

$$v_{qs}^r = R_s i_{qs}^r + L_{qs} \frac{d}{dt} i_{qs}^r + \omega_r (L_{ds} i_{ds}^r + I_f) \quad (2.60)$$

其等效電路圖如圖 2.5 所示。

至於內嵌式永磁同步機之機械系統模式，吾人使用旋轉運動之機械方程式，獲得如下之結果：

$$T_e = J \frac{d\omega_m}{dt} + B\omega_m - T_{load} \quad (2.61)$$

其中

- J : 轉子慣量
- B : 摩擦黏滯係數
- T_{load} : 負載轉矩

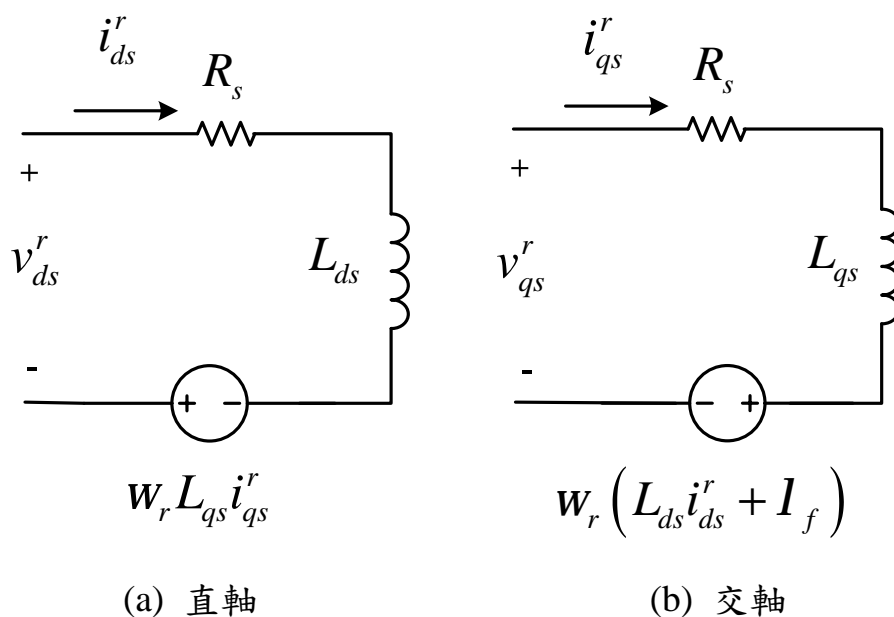


圖 2.5 內嵌式永磁同步機在同步座標下之數學模型等效電路

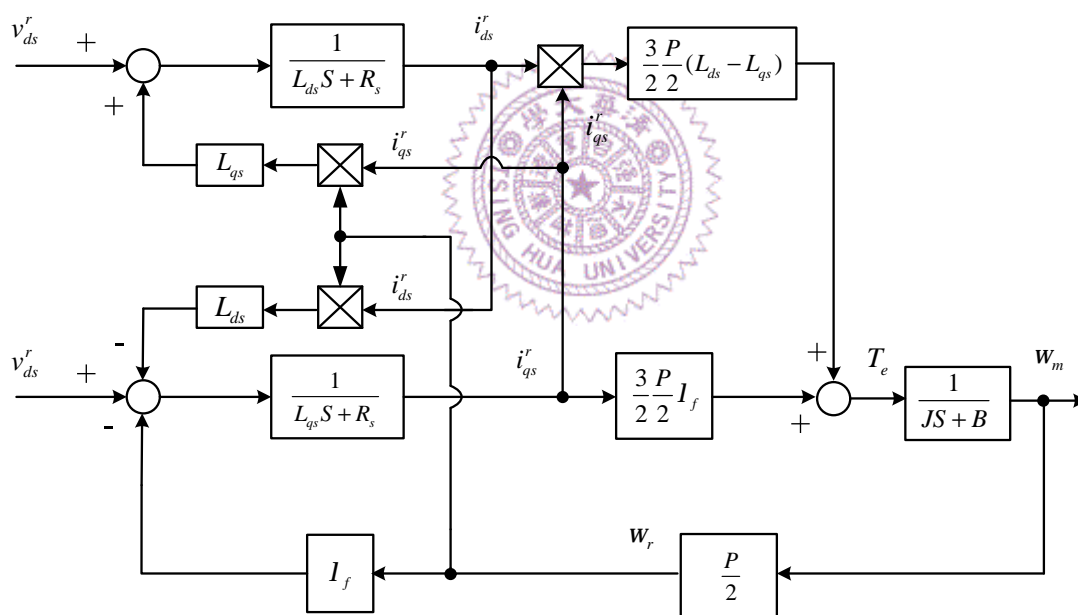


圖 2.6 內嵌式永磁同步電動機在轉子轉座標

下電氣與機械動態模型

結合(2.59)、(2.60)式及(2.61)式可得到內嵌式永磁同步電動機在同步旋轉座標系統之下電氣與機械動態模型如圖 2.6 所示。

交流電動機磁場導向控制於 1970 年左右被提出，主要是依據轉

子磁場位置來決定定子電壓向量、電流向量的大小與相角。此控制技術可以使交流電動機得到瞬時之輸出轉矩，提升交流電動機之動態響應，因此已被廣泛運用於交流電機控制。根據 2.2 節所推導的內嵌式永磁同步電動機在轉子座標下之數學模型，吾人將依據磁場導向控制理論，控制定子電樞電流之大小與相角來達到內嵌式永磁同步電動機之轉矩控制。

由(2.57)式推得之結果，內嵌式永磁同步機之電磁轉矩由定子電樞電流 i_{ds}^r 、 i_{qs}^r 決定，而由(2.59)及(2.60)可知，欲使用 v_{ds}^r 、 v_{qs}^r 控制 i_{ds}^r 、 i_{qs}^r ，會因為直軸與交軸之耦合項 $w_r L_{qs} i_{qs}^r$ 與 $w_r (L_{ds} i_{ds}^r + I_f)$ 互相干擾，使響應結果不如預期。因此吾人採用電壓解耦合方式，先令：

$$v_{ds}^r = v_{ds,cmd} - w_r L_{qs} i_{qs}^r \quad (2.62)$$

$$v_{qs}^r = v_{qs,cmd} + w_r (L_{ds} i_{ds}^r + I_f) \quad (2.63)$$



其中 $v_{ds,cmd}^r$ 、 $v_{qs,cmd}^r$ 分別為控制 i_{ds}^r 、 i_{qs}^r 之電壓命令，將(2.62)式、(2.63)式帶入(2.59)式、(2.60)式得到：

$$v_{ds,cmd}^r = R_s i_{ds}^r + L_{ds} \frac{d}{dt} i_{ds}^r \quad (2.64)$$

$$v_{qs,cmd}^r = R_s i_{qs}^r + L_{qs} \frac{d}{dt} i_{qs}^r \quad (2.65)$$

將(2.64)式、(2.65)式改寫為：

$$\frac{d}{dt} i_{ds}^r = -\frac{R_s}{L_{ds}} i_{ds}^r + \frac{1}{L_{ds}} v_{ds,cmd}^r \quad (2.66)$$

$$\frac{d}{dt} i_{qs}^r = -\frac{R_s}{L_{qs}} i_{qs}^r + \frac{1}{L_{qs}} v_{qs,cmd}^r \quad (2.67)$$

因此經由電壓解耦合後，(2.59)式與(2.60)式之耦合項已去除，吾人可由 $v_{ds,cmd}^r$ 、 $v_{qs,cmd}^r$ 控制 i_{ds}^r 、 i_{qs}^r ，進而控制電磁轉矩。

依據(2.66)式、(2.67)式之結果，可設計轉子座標下直軸、交軸電流控制迴路，由於此電流控制迴路各個控制變數都在轉子座標下，因此所有變數都必須轉換至轉子座標，其直軸、交軸電流控制迴路之架構如圖 2.7 所示。

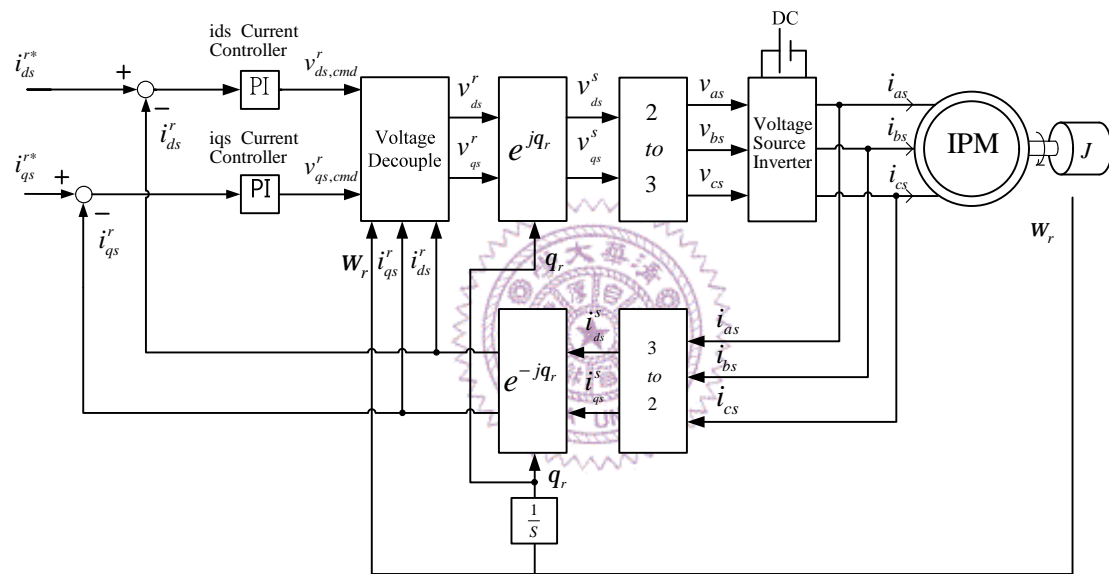


圖 2.7 轉子座標之直軸、交軸電流控制器

圖 2.7 中 e^{jq_r} 方塊代表轉子座標轉換至定子座標， e^{-jq_r} 方塊代表定子座標轉換至轉子座標，2 to 3 方塊代表將空間向量之直軸、交軸座標轉換至定子 a、b、c 繞組座標，3 to 2 方塊代表將定子 a、b、c 繞組座標轉換至空間向量之直軸、交軸座標。

2.3 內嵌式永磁同步電動機之最大轉矩控制策略[39]

內嵌式永磁同步電動機比表面黏著式永磁同步電動機多出了磁阻轉矩，為充分利用此磁阻轉矩之特性，本論文採用本實驗室於西元2003年所提出的內嵌式永磁同步電動機之線性轉矩控制[39]。此轉矩控制策略使內嵌式永磁同步電動機達到單位電流最大轉矩控制之效益，且擁有線性轉矩控制與易於實現等優點。本篇論文並未考慮到弱磁區之運作，因此轉矩控制策略較為簡易，本節將介紹此單位電流最大轉矩之轉矩控制策略。

首先根據定子座標之空間向量關係式得到：

$$|\vec{i}_s| = \sqrt{i_{ds}^2 + i_{qs}^2} \quad (2.68)$$

其中 \vec{i}_s 為定子電流之向量表示，將(2.68)式帶入(2.57)式可得到下式。

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \left(I_f i_{qs}^r + (L_{ds} - L_{qs}) \sqrt{|\vec{i}_s|^2 - i_{qs}^r^2} \times i_{qs}^r \right) \quad (2.69)$$

若假設定子電流向量之大小為常數時，也就是 $|\vec{i}_s| = i_{am}$ 並帶入(2.69)式得：

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{P}{2} \left(I_f i_{qs}^r + (L_{ds} - L_{qs}) \sqrt{i_{am}^2 - i_{qs}^r^2} \times i_{qs}^r \right) \quad (2.70)$$

將(2.70)式對 i_{qs}^r 微分並將結果令為零，也就是：

$$\frac{dT_e}{di_{qs}^r} = 0 \quad (2.71)$$

此運算就物理意義而言，表示在某個固定的定子電流向量下，所能產生之最大電磁轉矩，而產生此最大電磁轉矩之 i_{ds}^r 必須滿足以下之關係式[39]。

$$i_{ds}^r = \frac{I_f}{2(L_{qs} - L_{ds})} - \sqrt{\frac{I_f^2}{4(L_{qs} - L_{ds})^2} + i_{qs}^{r^2}} \quad (2.72)$$

得到 i_{ds}^r 後，可由(2.68)式得到 i_{qs}^r 。

$$i_{qs}^r = \sqrt{i_{am}^2 - i_{ds}^{r^2}} \quad (2.73)$$

不考慮弱磁運作時，只需考慮電流限制條件， i_{ds}^r 、 i_{qs}^r 必須滿足：

$$i_{ds}^{r^2} + i_{qs}^{r^2} \leq I_{SM}^2 \quad (2.74)$$

其中 I_{SM} 為空間向量表示之最大定子電流。

在電流限制條件下，單位安培最大轉矩軌跡上之 i_{ds}^r 與 i_{qs}^r 關係可寫為下式[38]。

$$2(L_{qs} - L_{ds})i_{ds}^r - I_f + \sqrt{I_f^2 + 4(L_{qs} - L_{ds})^2 i_{qs}^{r^2}} = 0 \quad (2.75)$$

由(2.75)式與(2.74)式，可以得到電流限制圓下所能產生之最大轉矩為：

$$T_{eM} = \frac{3}{2} \frac{P}{2} [I_f + (L_{ds} - L_{qs}) i_{dsM}^r] i_{qsM}^r \quad (2.76)$$

其中

$$i_{dsM}^r = \frac{I_f - \sqrt{I_f^2 + 8(L_{qs} - L_{ds})^2 I_{SM}}}{4(L_{qs} - L_{ds})} \quad (2.77)$$

$$i_{qsM}^r = \sqrt{I_{SM}^2 - I_{dsM}^2} \quad (2.78)$$

為了能夠達到線性轉矩控制，引入一控制量 u^* ，其定義如下：

$$u^* \triangleq \frac{T_e^*}{K_{tM}} = \frac{\frac{3}{2} \frac{P}{2} [I_f + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^{r*}] i_{qs}^{r*}}{K_{tM}} \quad (2.79)$$

其中

$$K_{tM} \triangleq \frac{T_{eM}}{I_{SM}} \quad (2.80)$$



因此可得到某電磁轉矩命令對應之 i_{qs}^r 與 u^* 之關係如下

$$i_{qs}^r = \frac{T_e^*}{\frac{3}{2} \frac{P}{2} [I_f + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^{r*}]} = \frac{K_{tM} u^*}{\frac{3}{2} \frac{P}{2} [I_f + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^{r*}]} \quad (2.81)$$

將(2.81)帶入(2.75)式可得到某電磁轉矩命令對應之控制量 u^* 與直軸電流命令關係：

$$(L_{ds} - L_{qs})^3 i_{ds}^{r*4} + 3(L_{ds} - L_{qs})^2 I_f i_{ds}^{r*3} + 3(L_{ds} - L_{qs})^2 I_f^2 i_{ds}^{r*2}$$

$$-\frac{16}{9P^2}(L_{ds} - L_{qs})K_{tM}^2 u^{*2} = 0 \quad (2.82)$$

同理，某電磁轉矩命令對應之 i_{ds}^r 與 u^* 之關係如下

$$i_{ds}^r = \frac{\frac{4K_{tM}}{3P}u^* - I_f i_{qs}^{r*}}{(L_{ds} - L_{qs})i_{qs}^{r*}} \quad (2.83)$$

將(2.83)帶入(2.75)式可得到在某電磁轉矩命令對應之控制量 u^* 與交軸電流命令關係：

$$9P^2(L_{ds} - L_{qs})^2 i_{qs}^{r*4} + 12PK_{tM}I_f u^* i_{qs}^{r*3} - 16K_{tM}^2 u^{*2} = 0 \quad (2.84)$$

故吾人若有一電磁轉矩命令 T_e^* ，可由(2.79)式產生對應之控制量 u^* ，此控制量 u^* 由(2.82)式與(2.84)式解出直軸、交軸電流命令 i_{ds}^{r*} 、 i_{qs}^{r*} ，其關係如圖 2.8 所示。

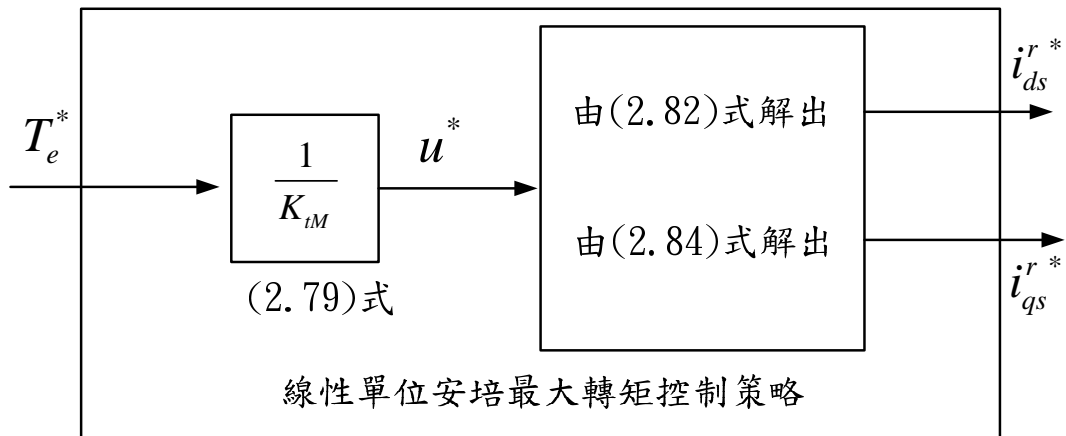


圖 2.8 本篇論文所採用之轉矩控制策略

2.4 負載轉矩估測器[37]

傳統比例積分速度控制器是針對固定參數之電動機與無負載轉矩情況下設計獲得，故當電動機外加負載時，會使轉速響應結果不如預期。為改善電動機加載時之暫態響應，一般常使用前饋補償來消除負載轉矩對轉速響應之干擾。本論文亦採用此負載轉矩前饋補償改善暫態響應，其中負載轉矩採用降階估測器(Reduced order Estimator)[37]估測獲得，本節將介紹負載轉矩降階估測器，並模擬負載轉矩前饋補償之結果。

為完整介紹，吾人先推導降階估測器之通式，再針對本論文之所需做設計。考慮欲估測的系統如下[37]：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} F_{aa} & F_{ab} \\ F_{ba} & F_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_a \\ G_b \end{bmatrix} u \triangleq F \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} + Gu \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

其中 x_a : 可由感測器直接量測訊號之狀態變數

x_b : 需要估測訊號之狀態變數

u : 輸入

y : 輸出

F, G : 為已知常數矩陣

將(2.85)式展開，則需估測狀態 x_b 之方程式為：

$$\dot{x}_b = F_{bb}x_b + F_{ba}x_a + G_bu \quad (2.86)$$

定義 \hat{x}_b 為 x_b 之估測值，且令

$$\tilde{x}_b = x_b - \hat{x}_b \quad (2.87)$$

其中 \tilde{x}_b 為估測誤差，接著對(2.87)式兩邊微分：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{x}_b &= \dot{x}_b - \dot{\hat{x}}_b \\ &= F_{bb}x_b + F_{ba}x_a + G_b u - \dot{\hat{x}}_b \\ &\triangleq (F_{bb} - lF_{ab}) \tilde{x}_b \end{aligned} \quad (2.88)$$

(2.88)式即表示估測誤差之動態方程式，其中 $F_{bb} - lF_{ab}$ 為動態方程式之特徵值，因此可由設計 l 值來決定估測誤差之收斂速度，估測誤差趨近於零，意即 $\hat{x}_b \approx x_b$ ，則吾人可得有效之估測值 \hat{x}_b 。

將(2.86)式代入(2.88)式：

$$F_{bb}x_b + F_{ba}x_a + G_b u - \dot{\hat{x}}_b = (F_{bb} - lF_{ab})(x_b - \hat{x}_b) \quad (2.89)$$

(2.89)式經整理後可得：

$$\dot{\hat{x}}_b = F_{bb}\hat{x}_b + F_{ba}y + G_b u + l(\dot{y} - F_{aa}y - G_a u - F_{ab}\hat{x}_b) \quad (2.90)$$

(2.90)式又可寫為：

$$\dot{\hat{x}}_b = (F_{bb} - lF_{ab})\hat{x}_b + (F_{ba} - lF_{aa})y + (G_b - lG_a)u + l\dot{y} \quad (2.91)$$

而(2.91)式中含有回授訊號之微分項(\dot{y})，實作時會因為微分運算將誤差放大而使雜訊過高，故無法準確估測 \hat{x}_b ，所以吾人定義一新的狀態變數 x_c 如(2.92)式。

$$x_c \triangleq \hat{x}_b - ly \quad (2.92)$$

將(2.92)代入(2.91)式中，則由新狀態變數 x_c 所實現之降階估測器為：

$$\dot{x}_c = (F_{bb} - lF_{ab})\hat{x}_b + (F_{ba} - lF_{aa})y + (G_b - lG_a)u \quad (2.93)$$

觀察(2.93)式，降階估測器中回授訊號之微分項(\dot{y})已不復見，因此依據(2.93)式可得降階估測器之方塊圖如圖 2.9 所示。

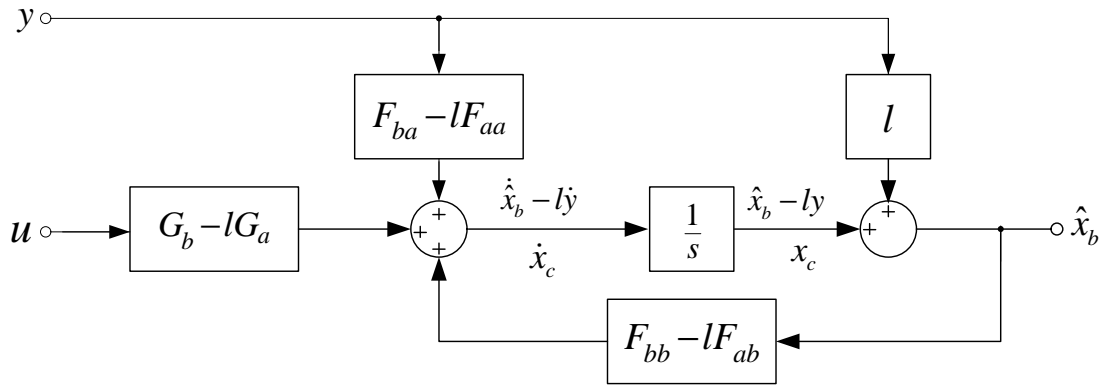


圖 2.9 降階估測器方塊圖

接著吾人將推導本電動機負載之估測器。電動機機械方程式可寫為：

$$T_e^* = J \frac{dw_m}{dt} + Bw_m + T_{Load} \quad (2.94)$$

其中： T_e^* 為電動機所產生之電磁轉矩， J 為電動機慣量， B 為摩擦黏滯係數， T_{Load} 為負載轉矩。若考慮不確定項(Uncertainty)，則(2.94)式可改寫為：

$$T_e^* = (J_0 + \Delta J) \frac{dw_m}{dt} + (B_0 + \Delta B) w_m + T_{Load} \quad (2.95)$$

其中 J_0, B_0 為標稱值(Nominal Value)
 $\Delta J, \Delta B$ 為變動量

由(2.95)式，吾人可得：

$$\frac{dw_m}{dt} = -aw_m - bT_e^* + bg \quad (2.96)$$

其中

$$a = \frac{B_0}{J_0}$$

$$b = -\frac{1}{J_0}$$

$$g = T_{Load} + \Delta J \frac{dw_m}{dt} + \Delta B w_m \quad (\text{不確定項之總和})$$

在不確定項總和 g 中，由於 ΔJ 與 ΔB 之變動都不大，所以 T_{Load} 主導 g 之變動。因為 T_{Load} 的變動不會在瞬間變化，於是吾人可假設其在很短暫的取樣時間內為常數。由以上之假設，吾人便可將欲估測之 g 與可量測之 w_m 代入(2.85)式：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} w_m \\ g \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b \\ 0 \end{bmatrix} T_e^* \\ y = w_m &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_m \\ g \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.97)$$

將(2.97)式代入(2.90)式，可得估測器動態方程式為：

$$\dot{\hat{g}} = l(\dot{y} + ay + bT_e^* - b\hat{g}) \quad (2.98)$$

其中 l 為狀態回授增益

\hat{g} 表示 g 之估測狀態

吾人定義 g 之估測誤差 \tilde{g} 為：

$$\tilde{g} = g - \hat{g} \quad (2.99)$$



由於數位控制器的取樣頻率相比， g 變化算是相當緩慢，其微分為零。因此吾人可得此估測誤差之動態方程式為：

$$\frac{d}{dt}\tilde{g} = -\frac{d}{dt}\hat{g} = -l(\dot{y} + ay + bT_e^* + b\hat{g}) \quad (2.100)$$

將(2.96)式代入(2.100)式，得：

$$\frac{d}{dt}\tilde{g} = -lb\tilde{g} \quad (2.101)$$

因此吾人可由 l 決定估測誤差之收斂速度，此 l 值必須審慎擇之，若取太大時，雖然可使快速收斂，其估測訊號 \tilde{g} 也會引入雜訊。若太小，

則降低估測誤差之收斂速度，在實作時，可視實際狀況而做調整，一般而言可選擇估測誤差之收斂速度比系統動態快 2 至 6 倍[37]。
(2.100) 式中由於 \dot{y} 是速度訊號微分，實作時會造成雜訊放大，無法準確估測 \hat{g} ，所以吾人定義一新的控制器狀態 x_d ，令其為：

$$x_d \triangleq \hat{g} - ly \quad (2.102)$$

則(2.100)式可改寫為：

$$\dot{x}_d = l(ay + bT_e^* - b\hat{g}) \quad (2.103)$$

其方塊圖如圖 2.10 所示。

上述之負載轉矩估測器，吾人於實作之作法乃將其估測器以轉移函數方式實現。首先由梅森增益公式(Mason's Gain Formula)分別求得 T_e^* 對 \hat{g} 及 w_m 對 \hat{g} 之轉移函數，接著利用重疊原理可得到 \hat{g} 與 T_e^* 、 w_m 之關係如下：

$$\hat{g}(s) = \frac{l + \frac{la}{s}}{1 + \frac{lb}{s}} w_m(s) + \frac{\frac{lb}{s}}{1 + \frac{lb}{s}} T_e^*(s) \quad (2.104)$$

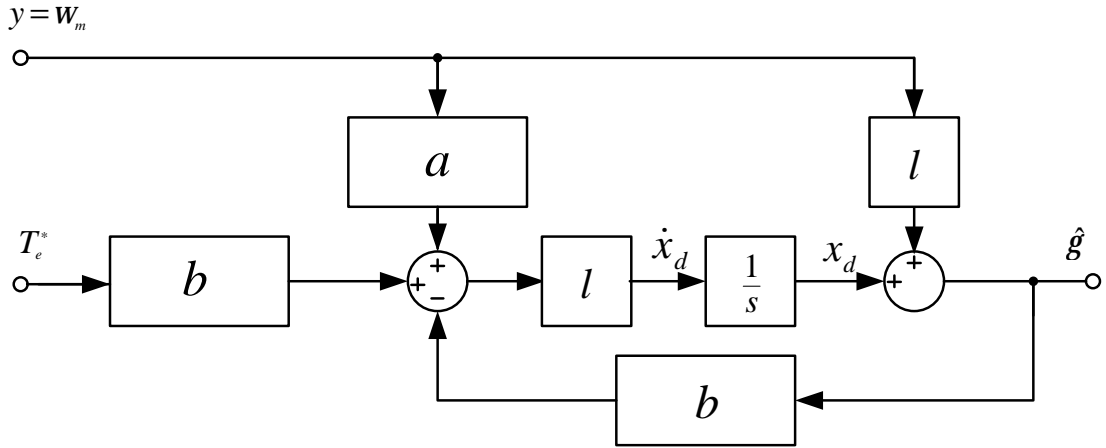


圖 2.10 本論文使用之負載轉矩估測器方塊圖

接著吾人於數位控制器實現時將(2.104)式中之積分項($\frac{1}{s}$)以後向(Backward)近似法，即：

$$\frac{1}{s} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} T_s \quad (2.105)$$



其中 T_s 為數位控制器之取樣周期，將(2.105)式代入(2.104)式整理後可得差分方程式如下：

$$\begin{aligned} \hat{g}(k) = & -(lbT_s - 1)\hat{g}(k-1) + lw_m(k) \\ & + T_sl(a-1)w_m(k-1) + lbT_sT_e^*(k-1) \end{aligned} \quad (2.106)$$

(2.106)式中， \hat{g} 即為估測之負載轉矩，在數位訊號處理器相當容易實現。

接著吾人為了驗證此負載轉矩前饋控制，將模擬速度控制之內嵌式永磁同步電動機加載情形，其模擬條件與電動機參數如表 2.1 所

示，而模擬結果如圖 2.11 所示。由圖 2.11(a)之轉速響應可見，比例積分控制器在無負載轉矩前饋補償時，有較大之轉速誤差，但在加上負載轉矩前饋補償後，可以有效改善轉速響應結果。圖 2.11(b)為控制器之輸出轉矩，有負載轉矩前饋補償之比例積分控制器會輸出額外之轉矩，消除負載轉矩造成之干擾，圖 2.11(c)為估測器之轉矩。

表 2.1 內嵌式永磁同步電動機之參數值表

極數	6
轉子電阻	$0.15\ \Omega$
直軸電感	0.3mH
交軸電感	0.525mH
反電動勢常數	$0.042\text{V}/(\text{rad}/\text{sec})$
最大相電流	20A
轉子慣量	$19.4\text{m N}\cdot\text{sec}^2 / \text{rad}$
摩擦係數	$2.57\text{m N}\cdot\text{sec} / \text{rad}$
負載轉矩	1N-m

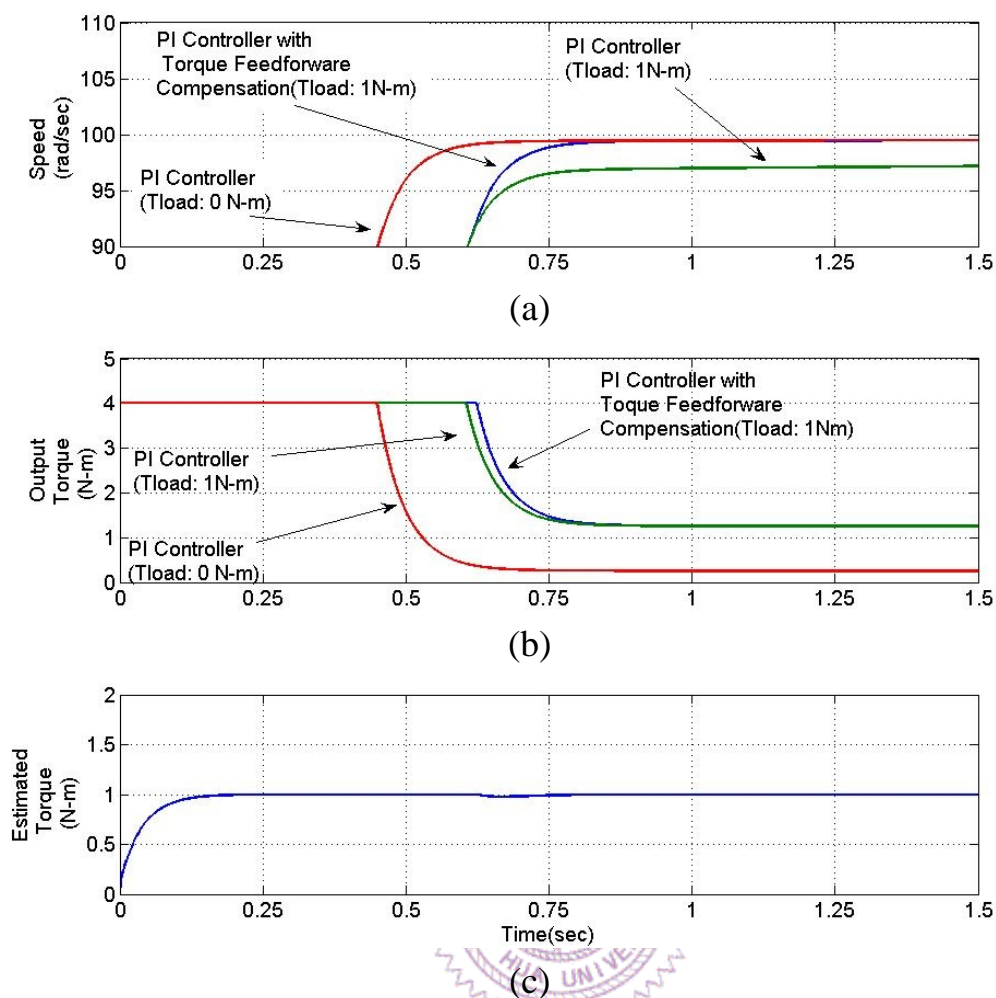


圖 2.11 (a)為轉速響應，(b)控制器輸出，(c)估測之負載轉矩