

第二章

線型永磁馬達之動作原理及其數學模型

2.1 前言

線型馬達起源之年代，雖然與旋轉式馬達幾乎同時，但是由於氣隙較大，效率較低，因此各方面的應用，仍以旋轉式馬達居多；當然相對投入線型馬達研究的資源與人力亦遠不及旋轉式馬達。所以本章第二節首先介紹一些線型馬達分類及其應用範圍。第三節則簡述本論文所使用線型永磁馬達之基本動作原理，並推導磁動勢(MMF)之空間向量(Space Vector)表示式，方便吾人表示及瞭解線型馬達內之磁場變化。為了方便讀者了解，第四節則從推導吾人所熟悉之旋轉式同步馬達(Synchronous Motor, SM)之數學模型為基礎[23]，再經由旋轉運動與直線運動之轉換，推導出線型永磁馬達之數學模型。

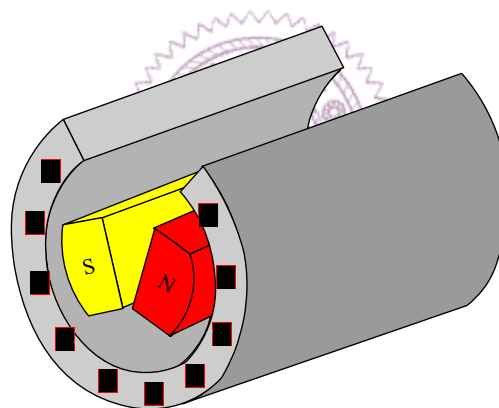
2.2 線型馬達簡介 [3,24,25]

基本上線型馬達的工作原理和一般旋轉式馬達相似。旋轉式馬達利用定子平衡的多相繞組通以平衡的多相電流，以產生一旋轉磁場，此旋轉磁場與轉子產生磁場作用而產生轉矩，產生運動。而線型馬達可視為將旋轉式馬達沿轉軸切開，將定子及轉子展開成平面狀，再依長度需要，以相同型樣，加以延伸。如圖 2.1 所示(以兩極旋轉式永磁馬達為例)，如此原本旋轉的磁場就變成直線方向行進的磁場，而轉子的轉動也變成直線移動，此直線運動之物體為了與旋轉運動有

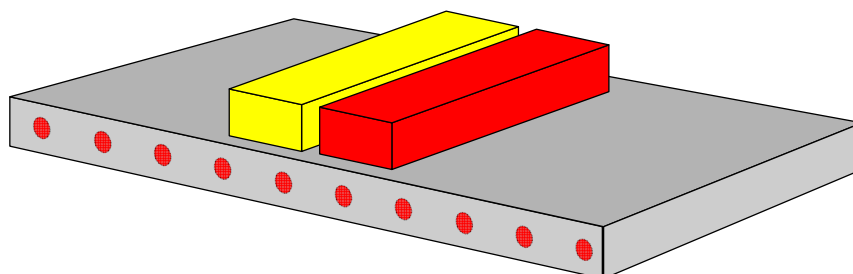
所區別，稱為動子(motion)，當然如果直線運動之長度超過兩極平展之長度，吾人可以前述基本結構，重複延伸以達到所需之長度。



(a)



(b)



(c)

圖 2.1 由旋轉馬達剖開展成線型馬達之示意圖 (a)二極式旋轉永磁馬達 (b)沿轉軸展開之部分展開 (c)完全展開成平面時即成為線型馬達

基於相對運動的原理，在一般定位系統的應用，吾人常將永磁線型馬達的永久磁鐵部分當成定子，而以通交流電的部分當作動子，如圖 2.2 表示。本論文所使用之線型馬達即為此型式。

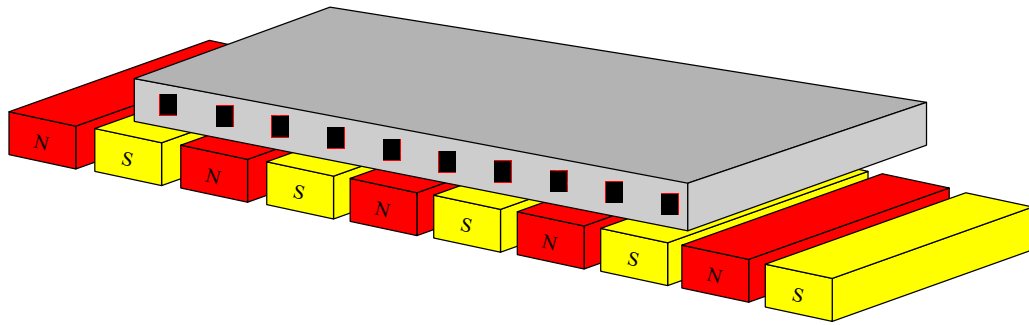


圖 2.2 以永久磁鐵當定子的線型永磁馬達

由上述可知，將任何一種旋轉馬達剖開展成平面並加以適度延伸，都可以得到對應的線型馬達，所以線型馬也可依動作原理分類如下：

- (1) 線型感應馬達(Linear Induction Motor, LIM)
- (2) 線型脈波馬達(Linear Pulse Motor, LPM)
- (3) 線型直流馬達(Linear Direct Current Motor, LDM)
- (4) 線型同步馬達(Linear Synchronous Motor, LSM)

目前常用的各種線型馬達，其優缺點與用途如表 2.1[24,25]所示。其中線型同步馬達，依其機械結構可分類如下：

- (1) 整體為扁平型或管型
- (2) 定子(或軌道)之永久磁鐵鋪設為單邊或雙邊
- (3) 動子繞線支架為槽式或無槽式
- (4) 動子線圈為鐵心式或無鐵心式

其各項特點如表 2.2[25]所示。

表 2.1 不同類線型馬達之優缺點比較[24,25]

線型馬達型式	優缺點及應用範圍	優點	缺點	應用範圍
線型感應馬達 (LIM)		1. 推力大 2. 可靠度高 3. 價格低廉 4. 可高速運轉	1. 維護不易 2. 無法做精密定位 3. 不易做微量往復運動	1. 高速鐵路車輛驅動控制 2. 自動門驅動控制 3. 重金屬搬運
線型脈波馬達 (LPM)		1. 可做開迴路定位 2. 有自己保持力可使位置固定 3. 移動距離與輸入脈波完全成比例	1. 較缺高速性能 2. 不適合長動程 3. 負載變動易引起失步	1. 印表機磁頭之移動控制 2. 繪圖機筆尖之移動控制
線型直流馬達 (LDM)		1. 高速伺服能力良好 2. 推力對重量比較佳 3. 可微量往復運動	1. 不可長動程運動 2. 需要回授控制	1. 磁盤裝置之磁頭移動控制 2. 電動縫紉機之針頭移動控制
線型同步馬達 (LSM)		1. 可定速移動 2. 效率較 LIM 佳	1. 價格昂貴 2. 驅動器較不易設計	1. 無塵室作業台之驅動控制 2. 超高速列車之驅動控制

除上述分類外，線型同步馬達已產品化之二大主流可分為：線型直流無刷馬達(Linear Brushless DC Motor, LBDCM)及線型永磁同步馬達(Linear Permanent Magnet Synchronous Motor, LPMSM)，或簡稱線型永磁馬達。而本論文所使用之 HIWIN LMCB6 為線型扁平型永磁同步馬達，定子永久磁鐵鋪設為雙邊，動子繞線支架為槽式，線圈為無鐵心式。其三相反電動勢，經量測後如圖 2.3 所示。其規格如表 2.3 所示。

表 2.2 不同結構線型同步馬達特性之比較[25]

線型同步馬達之分類		特 性
依整體結構之形狀	扁平型	需軸承機構，動程較大
	管 型	外部無需軸承機構，動程小
依定子永久磁鐵之鋪設方式	單 邊	推力小，容易保持空氣隙(air gap)之大小
	雙 邊	推力大，不易保持空氣隙之大小
依動子繞線支架之結構	槽 式	反電動勢為弦波，驅動器設計容易，但製程繁瑣，成本高
	無槽式	反電動勢為類弦波，驅動器設計較不易，但製程簡單，成本低
依動子線圈是否具有鐵心	鐵心式	推力大，轉矩漣波大
	無鐵心式	推力小，轉矩漣波小

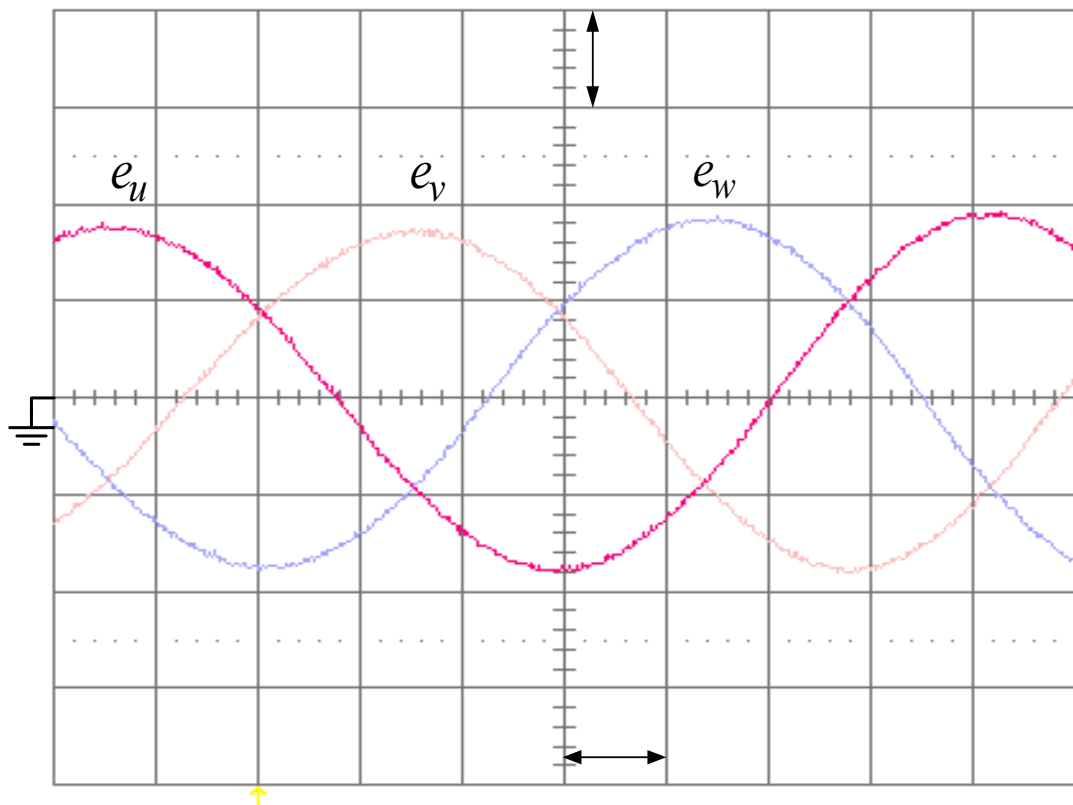


圖 2.3 HIWIN LM CB6 線型永磁馬達三相反電動勢波形圖

表 2.3 HIWIN LMCB6 線型永磁馬達規格表

連續推力	108Nt
連續電流	2A
瞬間推力	236Nt
瞬間電流	2A
相數	3 相 (Y 接)
相間電阻	6.7Ω
相間電感	4.4mH
極距	16mm
反電動勢常數	$29.3V_{rms}/(m/s)$

2.3 線型永磁馬達運作原理

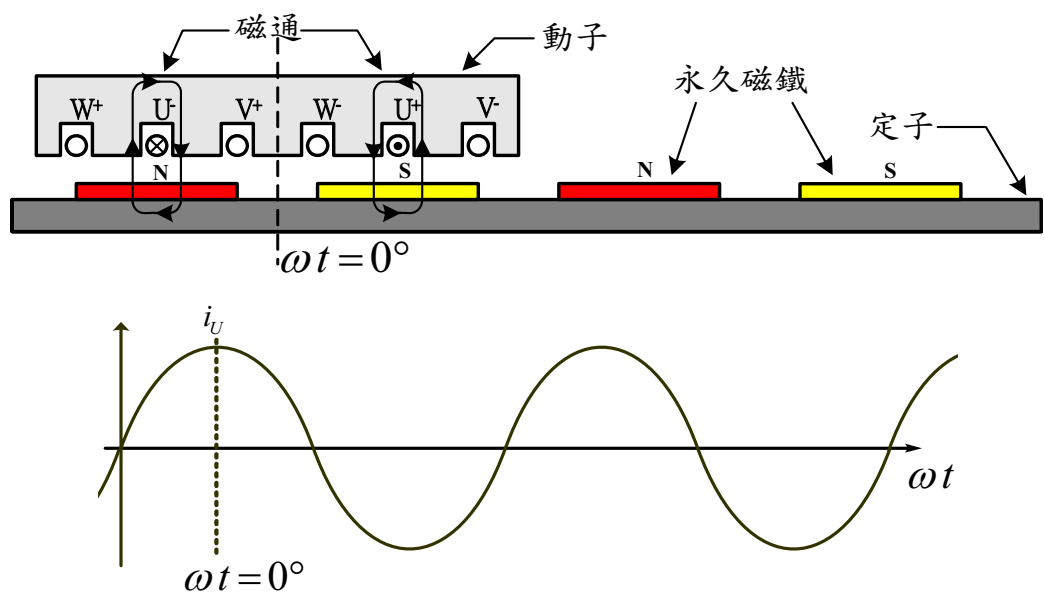
為方便說明起見，本節將先以定子永久磁鐵鋪設為單邊結構為例，說明線型永磁馬達之運作原理[23,24]，然後再擴展至雙邊結構。

吾人先假設在 $\omega t = 0^\circ$ 時，動子位置如圖 2.4(a)所示(其中之線型馬達吾人假設其為極數二極之線型同步馬達，且操作在穩態)，此時 U 相電流輸入為正值，在動子剖面圖中即為從 U^+ 流到 U^- 的電流，形成環繞 U 線圈磁場，隨後再加入 V 和 W 二相電流，即形成三個個別的磁場。如圖 2.4(b)所示，三磁場交互作用後會將虛線部分抵消，即可得到合成磁場如圖 2.4(c)所示。由圖 2.4(c)中可見， W^+ 、 U^- 及 V^+ 相之導體電流為流入紙面方向，而底下定子磁鐵 N 之磁場方向為指向導體方向，由載流導體在磁場中之受力公式， $\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$ (式中 l 為導

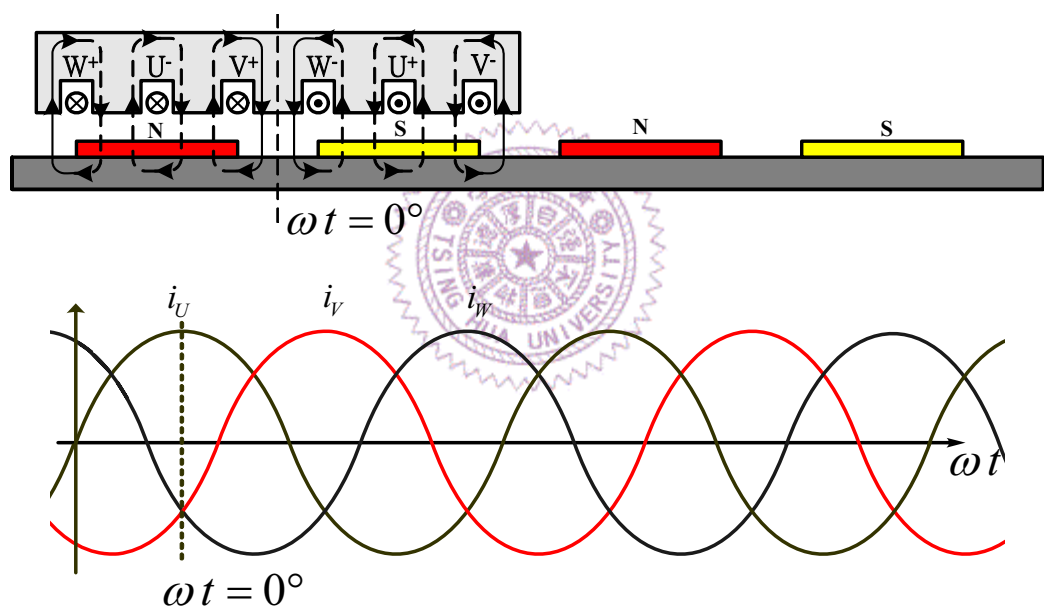
體長度， I 為其所流通之電流，而 B 則為導體所在處之磁通量密度)，可知此三相導體受力方向為向右，即圖 2.4(c) 中所示之運動方向；同理 W^- ， U^+ 及 V^- 相之導體電流為流出紙面方向，而 S 磁鐵磁方向則與前述 N 磁鐵方向相反，故運動方向亦為向右。

線型永磁馬達運作原理，如圖 2.5 所示。隨著合成磁場的變化，動子與定子所對應的位置(動子中心點為定位點)也隨之改變，也就是說在二倍極距(pole pitch)的範圍內，一個周期(電氣角 $0^\circ \sim 360^\circ$) 的三相電流，如圖 2.5(a)所示， $\omega t = 0^\circ \sim 360^\circ$ ，由於同步關係，其正好對應合成磁場之磁性角一周，即 N 極到 S 極，再由 S 極到 N 極，其變化為 $0^\circ \sim 360^\circ$ ，如圖 2.5(b)~(f)所示。上述現象與旋轉式永磁同步馬達是一樣的。由此可知，從機構的觀點來看，吾人所得到的物理觀念與操作原理，線型永磁同步馬達與旋轉永磁同步馬達是相似的，其差異只在於直線運動與旋轉運動之不同，這也是為什麼在未來的 2.4 節中，吾人推導線型永磁馬達的數學模型是以旋轉式永磁同步馬達為基礎。

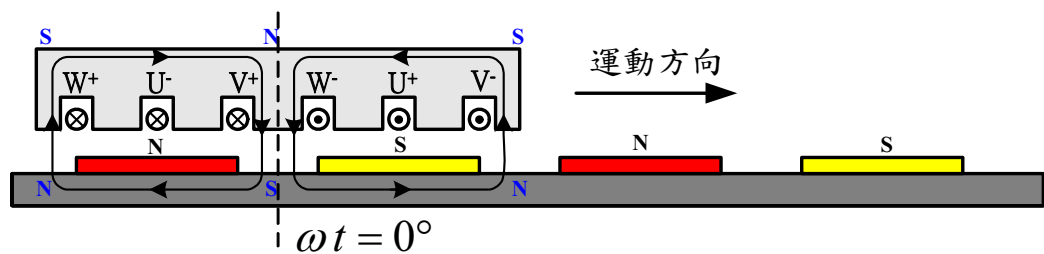
由上述定子單邊結構，擴展至定子雙邊結構，如圖 2.6 所示。吾人可觀察，此結構中，定子永久磁鐵之磁通為單邊結構之兩倍，則動子移動之推力，最大可以是單邊結構的二倍。此外，由於此結構是上下二個磁鐵相互作用之結果，在無法觀察的磁力線方面，吾人可推論，雙邊結構定子之磁力線比起單邊結構更均勻，且垂直於動子運動方向，更有利於說明，其『氣隙是均勻的』之假設。



(a) U 相電流所建立之磁場

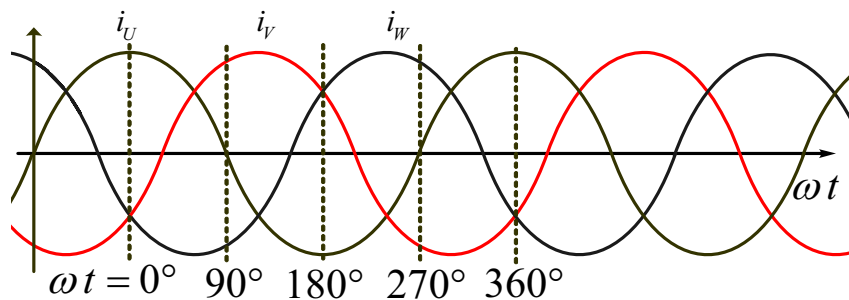


(b) 三相電流所建立之磁場

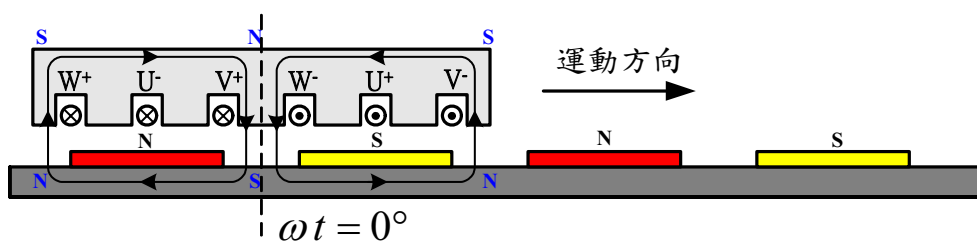


(c) 合成磁場作用與運動方向

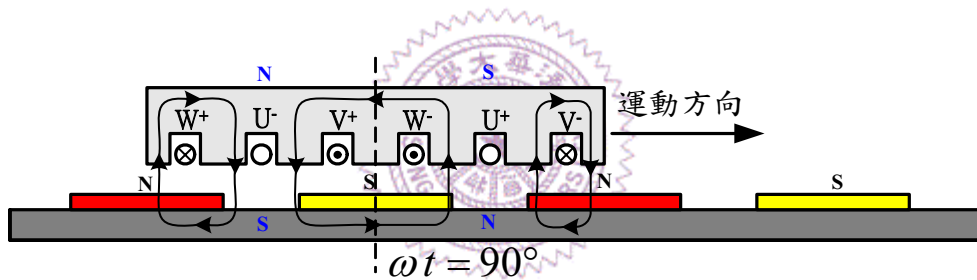
圖 2.4 線型永磁馬達之磁場建立 (a)U 相電流所建立之磁場 (b)三相電流所建立之磁場 (c)合成磁場作用與運動方向



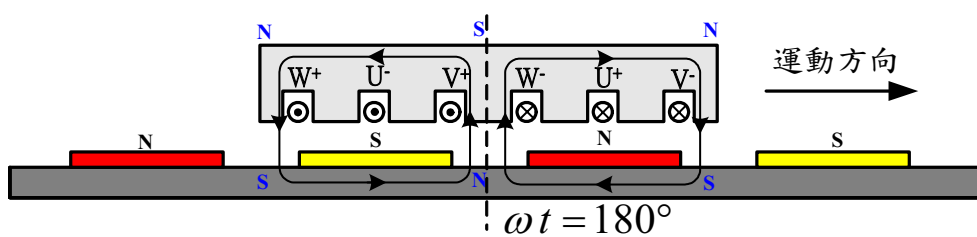
(a) 電流波形



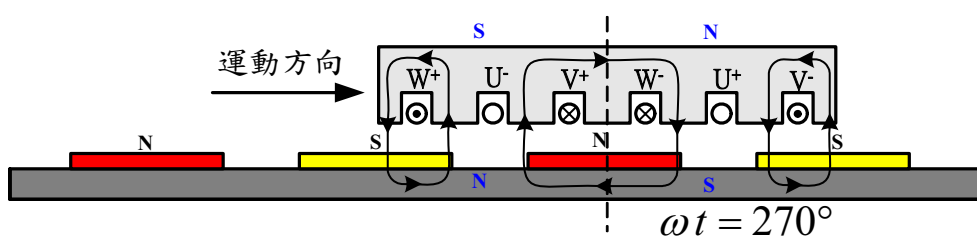
(b) $\omega t = 0^\circ$ 時動子與定子之相對位置



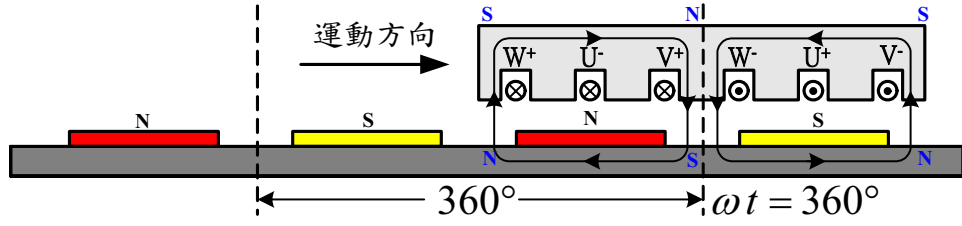
(c) $\omega t = 90^\circ$ 時動子與定子之相對位置



(d) $\omega t = 180^\circ$ 時動子與定子之相對位置



(e) $\omega t = 270^\circ$ 時動子與定子之相對位置



(f) $\omega t = 360^\circ$ 時動子與定子之相對位置

圖 2.5 線型永磁馬達動作原理說明 (a)三相電流波形 (b) $\omega t = 0^\circ$
(c) $\omega t = 90^\circ$ (d) $\omega t = 180^\circ$ (e) $\omega t = 270^\circ$ (f) $\omega t = 360^\circ$ 時動子與定子
之相對位置

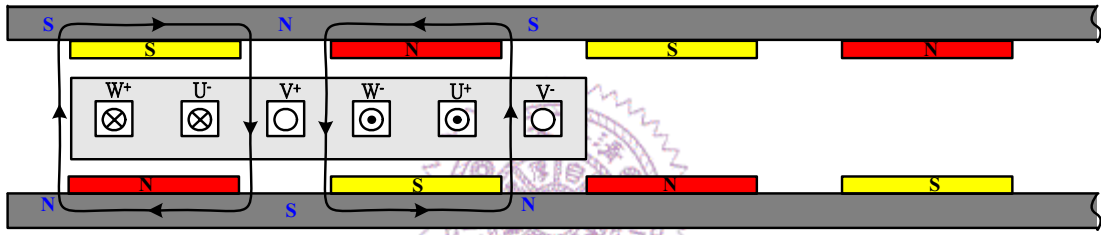


圖 2.6 定子雙邊結構示意圖

接著，吾人將推導磁動勢(MMF)之空間向量(Space Vector)，藉以瞭解輸入平衡三相電流所形成之磁場作用。為簡化計算，先推導旋轉式馬達之例子，再轉換至線型馬達。

吾人先假設輸入正序平衡三相電流如下：

$$\begin{cases} i_{as}(t) = I_m \cos \omega t \\ i_{bs}(t) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \\ i_{cs}(t) = I_m \cos \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 ω 為電流之角頻率

假設 N 為各相繞組之等效匝數，則三相之磁動勢分別為：

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{ap}(t) = NI_m \cos \omega t \cos \theta \\ F_{bp}(t) = NI_m \cos \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \cos \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \\ F_{cp}(t) = NI_m \cos \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right) \cos \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

其中 θ 為空間之角變數，且 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，而下標" p "代表輸入電流為正序

則吾人可得輸入正序電流所形成的磁動勢之空間向量[23]：

$$\begin{aligned} \vec{F}_p = \frac{2}{3} NI_m \left[\cos \omega t \cos \theta \hat{1} \right. \\ \left. + \cos \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \cos \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) \hat{a} \right. \\ \left. + \cos \left(\omega t + \frac{2}{3}\pi \right) \cos \left(\theta - \frac{2}{3}\pi \right) \hat{a}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

其中 $\hat{a} = e^{j\frac{2}{3}\pi}$

整理(2.3)式可得：

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= \frac{I_m}{2} e^{-j(\omega t - \theta)} \\ &= \frac{I_m}{2} \left[\cos(\omega t - \theta) - j \sin(\omega t - \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

同理，若輸入負序平衡三相電流為：

$$\begin{cases} i_{as}(t) = I_m \cos \omega t \\ i_{bs}(t) = I_m \cos \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right) \\ i_{cs}(t) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \end{cases} \quad (2.5)$$

則其所形成的磁動勢之空間向量可表示成下式：

$$\begin{aligned} \vec{F}_n &= N \frac{I_m}{2} e^{j(\omega t + \theta)} \\ &= N \frac{I_m}{2} \left[\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta) \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中下標"n"代表輸入電流為負序

茲假設線型馬達之極距為 τ ，而 x 為直線位移，則相對應於旋轉型馬達之極距 π 及旋轉角度 θ ，亦即：

$$\theta = \frac{\pi}{\tau} x \quad (2.7)$$

同理地，假設 v 表示線型馬達之直線速度，則由式(2.8)直接對時間微分，吾人即可得到以下關係式：

$$\omega = \frac{\pi}{\tau} v \quad (2.8)$$

將(2.7)與(2.8)式代入(2.4)式中，可得線型馬達輸入正序電流，所形成的磁動勢之空間向量：

$$\begin{aligned} \vec{F}_{pl} &= \frac{I_m}{2} e^{-j \frac{\pi}{\tau} (vt - x)} \\ &= \frac{I_m}{2} \left[\cos \frac{\pi}{\tau} (vt - x) - j \sin \frac{\pi}{\tau} (vt - x) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中下標"l"代表此為線性馬達之變數

將(2.7)與(2.8)式代入(2.6)式中，則可得線型馬達輸入負序電流，所形成的磁動勢之空間向量：

$$\begin{aligned}\vec{F}_{nl} &= \frac{I_m}{2} e^{j\frac{\pi}{\tau}(vt+x)} \\ &= \frac{I_m}{2} \left[\cos\frac{\pi}{\tau}(vt+x) + j \sin\frac{\pi}{\tau}(vt+x) \right]\end{aligned}\quad (2.10)$$

觀察(2.4)、(2.6)、(2.9)及(2.10)式所得到之結果，皆為標準行進波型式，吾人可得知，磁動勢在旋轉馬達裡，為一時變之旋轉場；而在線型馬達中則為一時變之直線前進場。為了更進一步觀察，吾人利用 Boland C++之程式語言，撰寫一應用程式將上述四式實現，呈現旋轉馬達與線型馬達之磁動勢，隨時間變化的結果，如圖 2.7 所示。

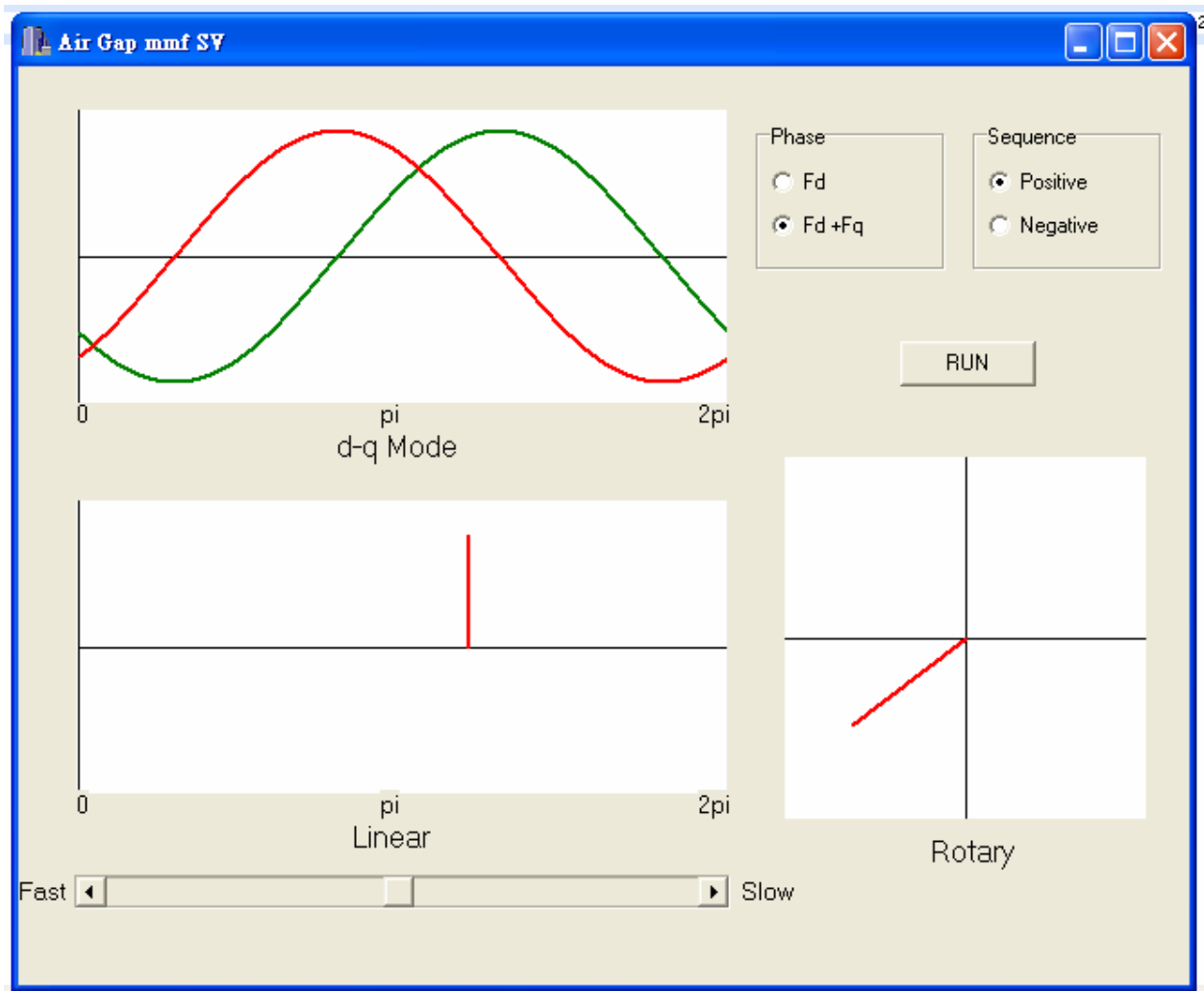


圖 2.7 實現磁動勢空間向量結果之應用程式畫面

2.4 線型永磁馬達數學模型[3,23]

為了完整起見，本節推導之同步馬達數學模型，首先以一轉子電流激磁之凸極式旋轉型同步馬達(Salient-pole Synchronous Motor)為例，然後探討其它特殊例子，如表面黏著式永磁同步馬達(Surface-mounted Permanent Magnet Synchronous Motor, SMPMSM)之數學模式便可輕易獲得，最後再以(2.7)式轉換成線型永磁馬達之數學模型。

在推導旋轉型凸極式同步馬達數學模型之前，先做以下假設：

1. 馬達一次側三相繞組為平衡三相繞組
2. 氣隙(Air Gap)中之磁動勢(MMF)為弦波分佈
3. 轉子為電流激磁且為凸極(Salient Pole)型式
4. 無阻尼繞組(Damper Winding)
5. 忽略繞線槽效應(Slot Effect)
6. 無磁飽和(No Magnetic Saturation)現象
7. 忽略鐵損(Core Loss)

圖 2.8 所示即為一台三相同步馬達之示意圖，其中 θ 定義為 a 相定子繞組所產生的磁場磁軸(a-axis)與轉子座標之直軸(d-axis)所形成的夾角。由於三相繞組之間彼此都有互感存在，而定子繞組與轉子繞組間亦存在互感。因此吾人可以利用耦合電感之模式推導永磁馬達之數學模式。假設定子三相繞組為 Y 接，則圖 2.8 之模型可以圖 2.9 之等效耦合電感電路表示之。其定子電壓方程式，由克希荷夫電壓定律可表示如下：

$$\begin{aligned}
V_{as} &= R_s i_{as} + \frac{d}{dt} \lambda_{as} \\
V_{bs} &= R_s i_{bs} + \frac{d}{dt} \lambda_{bs} \\
V_{cs} &= R_s i_{cs} + \frac{d}{dt} \lambda_{cs}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

上式中 V_{ks} , i_{ks} 及 λ_{ks} , $k \in \{a, b, c\}$, 依序分別表定子 k 相相電壓、相電流及相磁鏈； R_s 則為每相繞組之電阻。

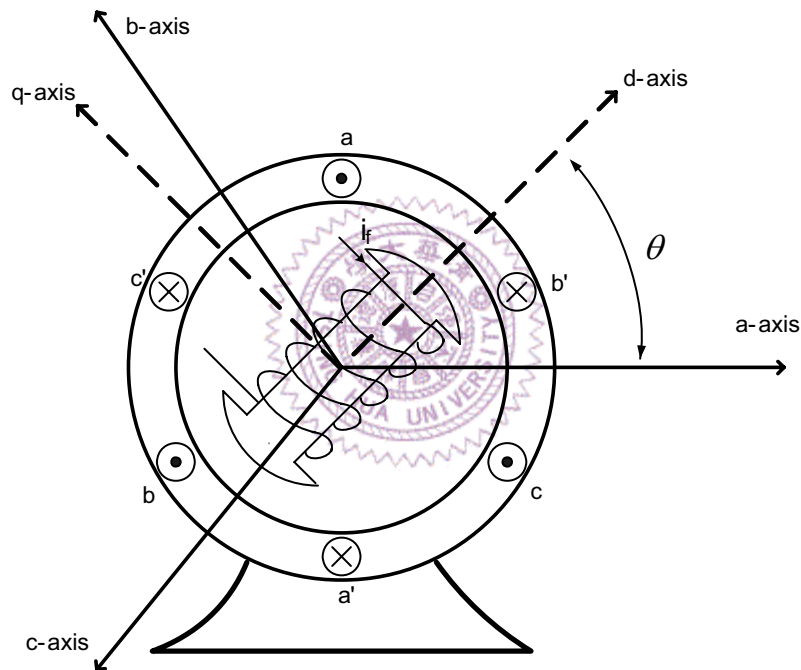


圖 2.8 理想三相同步馬達之定子及轉子繞組之示意圖

而由繞組間自感與互感亦可得下列各相三磁鏈方程式：

$$\begin{aligned}
\lambda_{as} &= \mathcal{L}_{aa} i_a + \mathcal{L}_{ab} i_b + \mathcal{L}_{ac} i_c + \mathcal{L}_{af} i_f \\
\lambda_{bs} &= \mathcal{L}_{ba} i_a + \mathcal{L}_{bb} i_b + \mathcal{L}_{bc} i_c + \mathcal{L}_{bf} i_f \\
\lambda_{cs} &= \mathcal{L}_{ca} i_a + \mathcal{L}_{cb} i_b + \mathcal{L}_{cc} i_c + \mathcal{L}_{cf} i_f
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 \mathcal{L}_{kk} 及 \mathcal{L}_{kj} , $k \in \{a, b, c\}$, $j \in \{a, b, c, f\}$ 分別表示各繞組之自感及之間之互感，而 i_f 則為轉子電流繞組激磁電流。

同理可得轉子電壓方程式：

$$\begin{aligned} V_f &= R_f i_f + \frac{d}{dt} \lambda_f \\ \lambda_f &= \mathcal{L}_{fa} i_a + \mathcal{L}_{fb} i_b + \mathcal{L}_{fc} i_c + \mathcal{L}_{ff} i_f \end{aligned} \quad (2.13)$$

其中 V_f , λ_f , R_f 及 \mathcal{L}_{ff} , 分別代表轉子繞組激磁電壓，磁鏈，電阻及自感，而 $\mathcal{L}_{fk} = \mathcal{L}_{kf}$, $k \in \{a, b, c\}$ 。

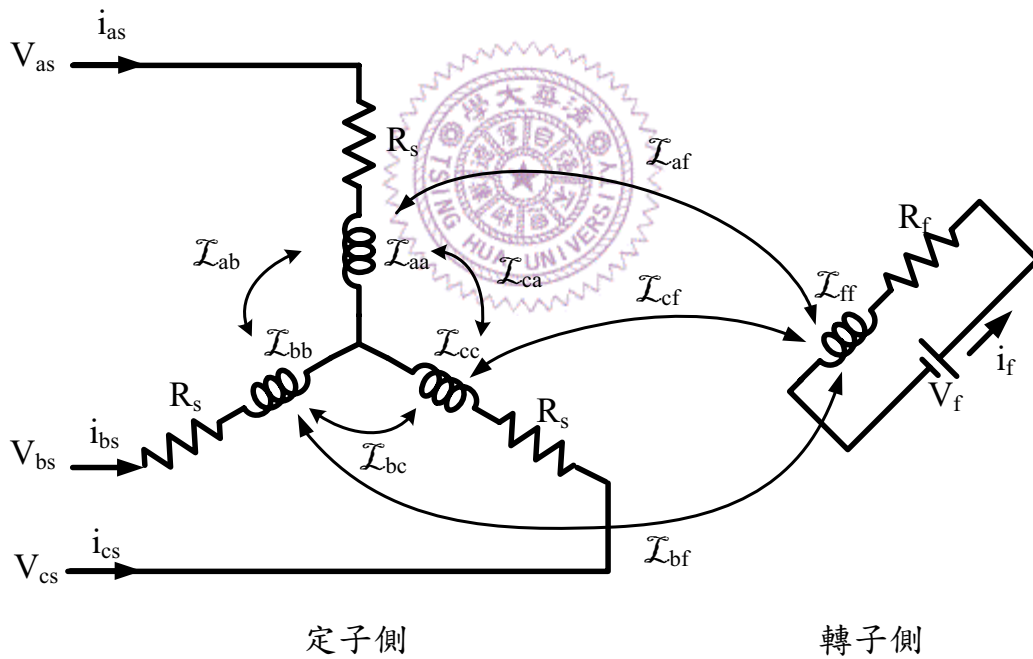


圖 2.9 理想三相同步馬達等效電路圖

接著，吾人將推導在定子與轉子電壓方程式中的各電感參數：

1. 轉子繞組之自感(\mathcal{L}_{ff}):

因為定子之機械結構為圓柱型，且對稱，所以 \mathcal{L}_{ff} 為常數，即：

$$\mathcal{L}_{ff} = L_{ff} \quad (2.14)$$

2. 定子繞組與轉子繞組間之互感($\mathcal{L}_{af}, \mathcal{L}_{bf}, \mathcal{L}_{cf}$):

以 a 相為例，只外加 i_f 電流，求 a 相之磁通鏈 λ_a ，則 $\mathcal{L}_{af} = \frac{\lambda_a}{i_f}$ 。

由圖 2.10 吾人可得知 θ 與 λ_a 之定性關係。例如在 $\theta = 0^\circ$ 時，磁通鏈 λ_a 達到最大值 L_{af} ，而在 $\theta = 90^\circ$ 時， $\lambda_a = 0$ 。由先前所假設

氣隙磁通分佈呈弦波變化之條件，因此可得：

$$\mathcal{L}_{af} = L_{af} \cos \theta \quad (2.15)$$

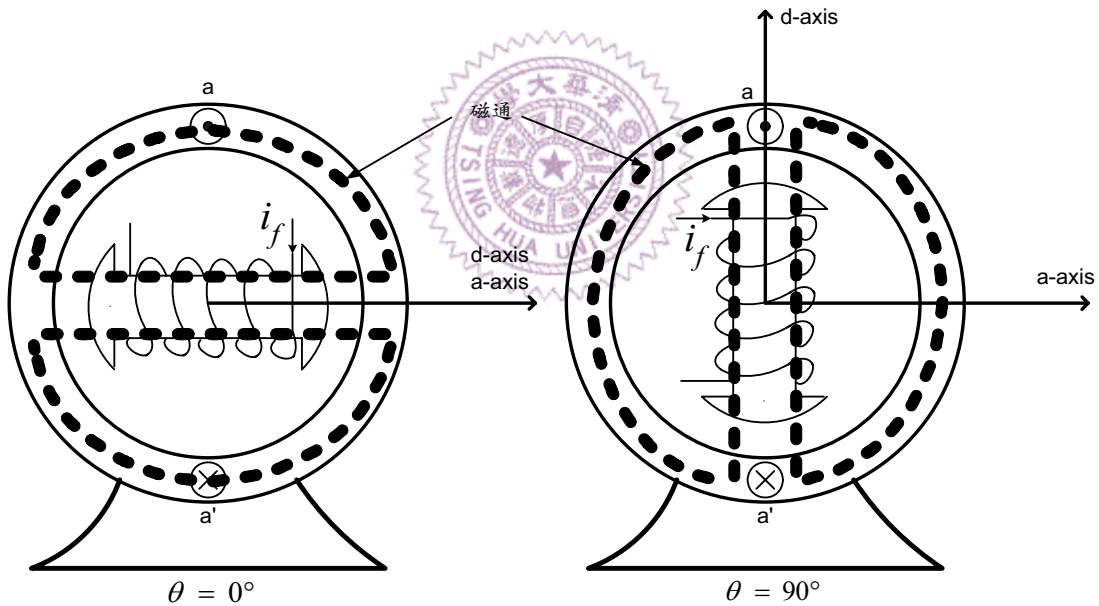


圖 2.10 通以 i_f 電流時， θ 位置與 λ_a 之關係

3. 定子各繞組之自感($\mathcal{L}_{aa}, \mathcal{L}_{bb}, \mathcal{L}_{cc}$):

以 a 相為例，只外加 i_a 電流，可求得 a 相之磁動勢 $F_a = N_s i_a$ ，其中 N_s 為每相繞組之有效匝數。如圖 2.11 所示，吾人可將 F_a 投

影至轉子之直軸和交軸而獲得直軸及交軸之分量如下：

$$\begin{aligned} F_{da} &= F_a \cos \theta \\ F_{qa} &= F_a \cos(\theta + 90^\circ) = -F_a \sin \theta \end{aligned} \quad (2.16)$$

由於磁通量(Flux) ϕ ，等於磁動勢與磁導(Permeance) \mathcal{P} 之乘積，即：

$$\phi = MMF \times \mathcal{P} \quad (2.17)$$

因此 a 相磁通量 ϕ_a 在直交軸之分量可表示如下：

$$\begin{cases} \phi_{da} = F_{da} \mathcal{P}_d = F_a \cos \theta \mathcal{P}_d \\ \phi_{qa} = F_{qa} \mathcal{P}_q = -F_a \sin \theta \mathcal{P}_q \end{cases} \quad (2.18)$$

其中 \mathcal{P}_d 及 \mathcal{P}_q 分別為直軸及交軸磁導

由圖 2.11 吾人可見 \mathcal{P}_d 及 \mathcal{P}_q 由於對稱磁路之故，變成與 θ 無關了，這也說明為何吾人要在(2.16)式中將 F_a 分解成二個直交軸分量來討論。

由於磁路並無飽和現象，因此吾人可用重疊定理求出 ϕ_a ：

$$\begin{aligned} \phi_a &= \phi_{da} \cos \theta + \phi_{qa} \cos(\theta + 90^\circ) \\ &= \phi_{da} \cos \theta - \phi_{qa} \sin \theta \\ &= F_a \cos^2 \theta \mathcal{P}_d + F_a \sin^2 \theta \mathcal{P}_q \\ &= F_a \left[\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \mathcal{P}_d + \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \mathcal{P}_q \right] \\ &= N_s i_a \left[\frac{\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q}{2} + \frac{\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q}{2} \cos 2\theta \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

求得 a 相磁通鏈 λ_a 為：

$$\lambda_a = N_s \phi_a = N_s^2 i_a \left[\frac{\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q}{2} + \frac{\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q}{2} \cos 2\theta \right] \quad (2.20)$$

則電感 \mathcal{L}_{aa} 為：

$$\mathcal{L}_{aa} = \frac{\lambda_a}{i_a} = N_s^2 \left[\frac{\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q}{2} + \frac{\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q}{2} \cos 2\theta \right] \quad (2.21)$$

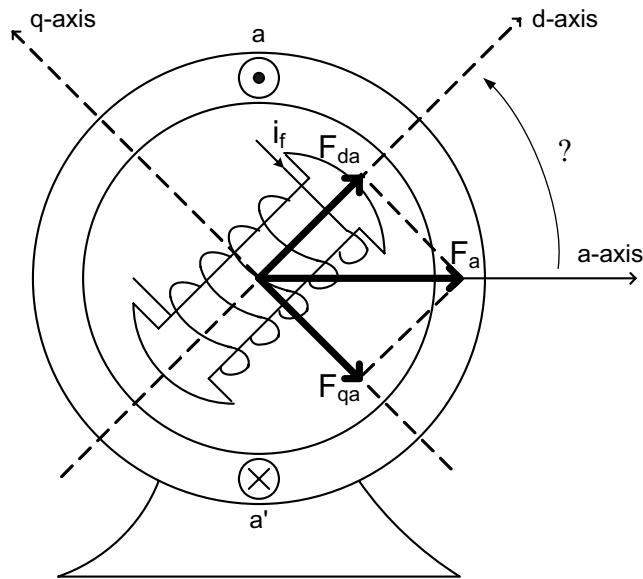
$$\triangleq L_1 + L_2 \cos 2\theta$$

上式中 $L_1 \triangleq N_s^2 \frac{(\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q)}{2}$ ， $L_2 \triangleq N_s^2 \frac{(\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q)}{2}$ 。

同理可得 $\mathcal{L}_{bb}, \mathcal{L}_{cc}$ ：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{bb} &= L_1 + L_2 \cos(2\theta + 120^\circ) \\ \mathcal{L}_{cc} &= L_1 + L_2 \cos(2\theta - 120^\circ) \end{aligned} \quad (2.22)$$

由上述之結果可知，任一相的定子自感都含有位置變數，而且是二次諧波之變化，此乃由於直軸與交軸空氣隙大小不相等所造成。



4. 定子繞組間之互感($\mathcal{L}_{ab}, \mathcal{L}_{ac}, \mathcal{L}_{ba}, \mathcal{L}_{bc}, \mathcal{L}_{ca}, \mathcal{L}_{cb}$)：

以 a、b 相耦合為例，只輸入 i_a 電流，其鏈接至 b 相之磁通量 ϕ_{ba} 為：

$$\begin{aligned}\phi_{ba} &= \phi_{dba} \cos(\theta - 120^\circ) + \phi_{qba} \cos(\theta + 90^\circ - 120^\circ) \\ &= \phi_{dba} \cos(\theta - 120^\circ) - \phi_{qba} \sin(\theta - 120^\circ) \\ &= N_s i_a \left[\frac{-(\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q)}{4} + \frac{(\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q)}{2} \cos(2\theta - 120^\circ) \right]\end{aligned}\quad (2.23)$$

假設定子三相之有效繞組皆相等， $N_{sa} = N_{sb} = N_{sc} = N_s$ ，則：

$$\begin{aligned}\lambda_b &= N_{sb} \phi_{ba} = N_s \phi_{ba} \\ &= N_s^2 i_a \left[\frac{-(\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q)}{4} + \frac{(\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q)}{2} \cos(2\theta - 120^\circ) \right]\end{aligned}\quad (2.24)$$

求得電感 \mathcal{L}_{ab} 為：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ba} &= \frac{\lambda_b}{i_a} \\ &= N_s^2 \left[\frac{-(\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q)}{4} + \frac{(\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q)}{2} \cos(2\theta - 120^\circ) \right] \\ &= -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos(2\theta - 120^\circ)\end{aligned}\quad (2.25)$$

同理可推得 $\mathcal{L}_{ab}, \mathcal{L}_{bc}, \mathcal{L}_{ca}, \mathcal{L}_{ac}, \mathcal{L}_{cb}$ 如下：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ab} &= \mathcal{L}_{ba} \\ \mathcal{L}_{bc} &= -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos 2\theta = \mathcal{L}_{cb} \\ \mathcal{L}_{ca} &= -\frac{1}{2} L_1 + L_2 \cos(2\theta + 120^\circ) = \mathcal{L}_{ac}\end{aligned}\quad (2.26)$$

將上述四項推導之結果寫成矩陣型式：

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{L}] &\triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{aa} & \mathcal{L}_{ab} & \mathcal{L}_{ac} & \mathcal{L}_{af} \\ \mathcal{L}_{ba} & \mathcal{L}_{bb} & \mathcal{L}_{bc} & \mathcal{L}_{bf} \\ \mathcal{L}_{ca} & \mathcal{L}_{cb} & \mathcal{L}_{cc} & \mathcal{L}_{cf} \\ \mathcal{L}_{fa} & \mathcal{L}_{fb} & \mathcal{L}_{fc} & \mathcal{L}_{ff} \end{bmatrix} \\
 [\mathcal{L}] &= \begin{bmatrix} L_l + L_1 + L_2 \cos 2\theta & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2\theta - 120^\circ) & & \\ -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2\theta - 120^\circ) & L_l + L_1 + L_2 \cos(2\theta + 120^\circ) & & \\ -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2\theta + 120^\circ) & & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos 2\theta & \\ & L_{af} \cos \theta & & L_{af} \cos(\theta - 120^\circ) \\ & & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos(2\theta + 120^\circ) & L_{af} \cos \theta \\ & & & -\frac{1}{2}L_1 + L_2 \cos 2\theta & L_{af} \cos(\theta - 120^\circ) \\ & & L_l + L_1 + L_2 \cos(2\theta - 120^\circ) & L_{af} \cos(\theta + 120^\circ) \\ & & & L_{af} \cos(\theta + 120^\circ) & L_f \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

其中：

$$L_1 = N_s^2 \frac{\mathcal{P}_d + \mathcal{P}_q}{2}$$

$$L_2 = N_s^2 \frac{\mathcal{P}_d - \mathcal{P}_q}{2}$$

$$L_f = \frac{\lambda_f}{i_f}$$

L_l 為漏電感

則定子電壓方程(2.11)、(2.12)式與轉子電壓方程(2.13)式可改寫成：

$$\bar{v} \triangleq \begin{bmatrix} v_{as} & v_{bs} & v_{cs} & v_f \end{bmatrix}^T + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{as} & \lambda_{bs} & \lambda_{cs} & \lambda_f \end{bmatrix}^T \tag{2.28}$$

$$\overline{\lambda} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_{as} & \lambda_{bs} & \lambda_{cs} & \lambda_f \end{bmatrix}^T = [\mathcal{L}] \begin{bmatrix} i_{as} & i_{bs} & i_{cs} & i_f \end{bmatrix}^T \quad (2.29)$$

為了方便控制器設計，吾人須將定子電壓方程式轉至同步參考座標。茲以電流變數為例，並且採用振幅不變轉換法(Amplitude Invariant Transform)。

由定子電流在定子座標之空間向量表示：

$$\overline{i_s} \triangleq \frac{2}{3} \begin{bmatrix} i_{as} + ai_{bs} + a^2 i_{cs} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

式(2.30)兩邊同乘 $e^{-j\theta}$ 以將其轉至同步座標，則：

$$\begin{aligned} \overline{i_s^e} &= \frac{2}{3} (i_{as} + ai_{bs} + a^2 i_{cs}) e^{-j\theta} \\ &= \frac{2}{3} (i_{as} + e^{j120^\circ} i_{bs} + e^{-j120^\circ} i_{cs}) e^{-j\theta} \\ &= \frac{2}{3} (i_{as} e^{-j\theta} + i_{bs} e^{-j(\theta-120^\circ)} + i_{cs} e^{-j(\theta+120^\circ)}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

再將(2.31)式以直交軸型式表示：

$$\begin{aligned} i_{ds}^e + ji_{qs}^e &= \frac{2}{3} [i_{as} (\cos \theta - j \sin \theta) + i_{bs} (\cos(\theta-120^\circ) - j \sin(\theta-120^\circ)) \\ &\quad + i_{cs} (\cos(\theta+120^\circ) - j \sin(\theta+120^\circ))] \end{aligned} \quad (2.32)$$

從(2.32)式可得下列二個實數方程式：

$$i_{ds}^e = \frac{2}{3} (i_{as} \cos \theta + i_{bs} \cos(\theta-120^\circ) + i_{cs} \cos(\theta+120^\circ)) \quad (2.33)$$

$$i_{qs}^e = \frac{2}{3} (-i_{as} \sin \theta - i_{bs} \sin(\theta-120^\circ) - i_{cs} \sin(\theta+120^\circ)) \quad (2.34)$$

假設該馬達為三相四線式，考慮不平衡狀況時，吾人尚須考慮下式零序電流成份：

$$i_{os} = \frac{1}{3}(i_{as} + i_{bs} + i_{cs}) \quad (2.35)$$

(2.33)式至(2.35)式可表示成矩陣型式如下：

$$\begin{bmatrix} i_{ds}^e \\ i_{qs}^e \\ i_{os} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta-120^\circ) & \cos(\theta+120^\circ) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta-120^\circ) & -\sin(\theta+120^\circ) \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

同理可將定子 a，b，c 三相之磁通鏈空間向量，即：

$$\overline{\lambda}_s^s = \frac{2}{3}(\lambda_{as}^s + a\lambda_{bs}^s + a^2\lambda_{cs}^s) \quad (2.37)$$

利用(2.27)及(2.29)式，經整理後可得：

$$\begin{aligned} \overline{\lambda}_s^s &= (L_l + \frac{3}{2}L_1)\overline{i}_s^s + L_2 i_{as} e^{j2\theta} + \frac{L_2 i_{bs}}{a} e^{j2\theta} + \frac{L_2 i_{cs}}{a^2} e^{j2\theta} + L_{af} i_f e^{j\theta} \\ &= (L_l + \frac{3}{2}L_1)\overline{i}_s^s + \frac{3}{2}L_2 e^{j2\theta} \frac{2}{3}(i_{as} + a^2 i_{bs} + a i_{cs}) + L_{af} i_f e^{j\theta} \\ &= (L_l + \frac{3}{2}L_1)\overline{i}_s^s + \frac{3}{2}L_2 e^{j2\theta} \overline{i}_s^{s*} + L_{af} i_f e^{j\theta} \end{aligned} \quad (2.38)$$

上式中 $\overline{i}_s^{s*} \triangleq \frac{2}{3}(i_{as} + a^2 i_{bs} + a i_{cs})$

將(2.38)式兩邊同乘 $e^{-j\theta}$ 以轉換至同步座標可得下列空間向量表示式：

$$\overline{\lambda}_s^e = (L_l + \frac{3}{2}L_1)\overline{i}_s^e + \frac{3}{2}L_2 \overline{i}_s^{e*} + L_{af} i_f \quad (2.39)$$

式(2.39)可再進一步利用直交軸座標分量表示之：

$$\lambda_{ds}^e + j\lambda_{qs}^e = (L_l + \frac{3}{2}L_1)(i_{ds}^e + ji_{qs}^e) + \frac{3}{2}L_2(i_{ds}^e - ji_{qs}^e) + L_{af}i_f \quad (2.40)$$

吾人可從式(2.40)式之實數、虛數部份分別得到以下二式：

$$\lambda_{ds}^e = L_{ds}i_{ds}^e + L_{af}i_f \quad (2.41)$$

$$\lambda_{qs}^e = L_{qs}i_{qs}^e \quad (2.42)$$

其中：

$$L_{ds} \triangleq (L_l + \frac{3}{2}(L_1 + L_2)) \text{ 稱為直軸等效電感}$$

$$L_{qs} \triangleq (L_l + \frac{3}{2}(L_1 - L_2)) \text{ 稱為交軸等效電感}$$

為完整起見，吾人亦可考慮零序成份如下：

$$\lambda_{os}^e = L_l i_{os} = L_{os} i_{os} \quad (2.43)$$

上式中 L_{os} 稱為零序等效電感

其次再考慮轉子部份之磁交鏈：

$$\begin{aligned} \lambda_f &= \mathcal{L}_{af}i_{as} + \mathcal{L}_{bf}i_{bs} + \mathcal{L}_{cf}i_{cs} + \mathcal{L}_f i_f \\ &= L_{af} \cos \theta i_{as} + L_{af} \cos(\theta - 120^\circ) i_{bs} + L_{af} \cos(\theta + 120^\circ) i_{cs} + L_f i_f \\ &= L_{af} \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} (i_{as} \cos \theta + i_{bs} \cos(\theta - 120^\circ) + i_{cs} \cos(\theta + 120^\circ)) + L_f i_f \\ &= \frac{3}{2} L_{af} i_{ds}^e + L_f i_f \end{aligned} \quad (2.44)$$

同理吾人可將(2.11)式表示成如下空間向量：

$$\overline{v_s^s} = R_s \overline{i_s^s} + \frac{d}{dt} \overline{\lambda_s^s} \quad (2.45)$$

再將(2.45)式兩邊同乘 $e^{-j\theta}$ 以轉換至同步座標：

$$\overline{v_s^e} = R_s \overline{i_s^e} + \frac{d}{dt} \overline{\lambda_s^e} + j\omega \overline{\lambda_s^e} \quad (2.46)$$

然後再以直交軸座標分量表示，空間向量俾將(2.47)式實數、虛數部份加以分離成下列結果：

$$v_{ds}^e = R_s i_{ds}^e + \frac{d}{dt} \lambda_{ds}^e - \omega \lambda_{qs}^e \quad (2.47)$$

$$v_{qs}^e = R_s i_{qs}^e + \frac{d}{dt} \lambda_{qs}^e + \omega \lambda_{ds}^e \quad (2.48)$$

為配合本論文內所採用之平衡三相三線式馬達，以下將不考慮零序成份，因此輸入馬達的功率為：

$$P = \frac{3}{2} (v_{ds} i_{ds} + v_{qs} i_{qs}) \quad (2.49)$$

將(2.41)、(2.42)、(2.47)與(2.48)式代入(2.49)式可得如下結果：

$$P = \frac{3}{2} \left\{ R_s (i_{ds}^2 + i_{qs}^2) + \frac{1}{2} \left(L_d \frac{d}{dt} i_{ds}^2 + L_q \frac{d}{dt} i_{qs}^2 \right) + \omega_e (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \right\} \quad (2.50)$$

觀察(2.50)式吾人不難發現式中第一項為銅損部分，第二項為儲存在磁場之能量之變化率部分，而第三項則與轉速有關，亦即是馬達輸出

功率。因此吾人可由 $T_e = \frac{P}{\omega_m}$ 與 $\omega_e = \frac{p}{2} \omega_m$ 二關係式，求得電磁轉矩：

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{p}{2} (\lambda_{ds} i_{qs} - \lambda_{qs} i_{ds}) \quad (2.51)$$

其中 p 為馬達之極數

若將(2.41)與(2.42)式代入(2.51)式吾人可得另一種表示式如下：

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{p}{2} [L_{af} i_f i_{qs}^e + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^e i_{qs}^e] \quad (2.52)$$

綜合以上(2.41)、(2.42)、(2.46)與(2.52)式，若轉子部份係為凸極式永久磁鐵，即為內嵌式永磁同步馬達(Interior Permanent Magnet Synchronous Motor, IPMSM)，則可令 $L_{af} i_f = \lambda_{mf}$ ， λ_{mf} 是等效到定子側之轉子磁通鏈。因此其數學模型可改寫為：

$$\begin{cases} v_{ds}^e = R_s i_{ds}^e + \frac{d}{dt} \lambda_{ds}^e - \omega_e \lambda_{qs}^e \\ v_{qs}^e = R_s i_{qs}^e + \frac{d}{dt} \lambda_{qs}^e + \omega_e \lambda_{ds}^e \end{cases} \quad (2.53)$$

$$\begin{cases} \lambda_{ds}^e = L_d i_{ds}^e + \lambda_{mf} \\ \lambda_{qs}^e = L_q i_{qs}^e \end{cases} \quad (2.54)$$

將(2.54)式代入(2.53)式：

$$\begin{cases} v_{ds}^e = R_s i_{ds}^e + L_d \frac{d}{dt} i_{ds}^e - \omega_e L_q i_{qs}^e \\ v_{qs}^e = R_s i_{qs}^e + L_q \frac{d}{dt} i_{qs}^e + \omega_e (L_d i_{ds}^e + \lambda_{mf}) \end{cases} \quad (2.55)$$

$$T_e = \frac{3}{2} \frac{p}{2} [\lambda_{mf} i_{qs}^e + (L_{ds} - L_{qs}) i_{ds}^e i_{qs}^e] \quad (2.56)$$

若轉子型式為表面黏著式(Surface-mounted)，由於其空氣隙大小一致，所以直交軸磁導相等($\mathcal{P}_d = \mathcal{P}_q$)，則 $L_2 = 0$ ，且 $L_d = L_q \triangleq L_s$ ，最後數學模型可改寫成下列形式：

$$\begin{cases} v_{ds}^e = R_s i_{ds}^e + \frac{d}{dt} \lambda_{ds}^e - \omega_e \lambda_{qs}^e \\ v_{qs}^e = R_s i_{qs}^e + \frac{d}{dt} \lambda_{qs}^e + \omega_e \lambda_{ds}^e \end{cases} \quad (2.57)$$

$$\begin{cases} \lambda_{ds}^e = L_s i_{ds}^e + \lambda_{mf} \\ \lambda_{qs}^e = L_s i_{qs}^e \end{cases} \quad (2.58)$$

同理將(2.58)式代入(2.57)式可得下列數學模式：

$$\begin{cases} v_{ds}^e = R_s i_{ds}^e + L_s \frac{d}{dt} i_{ds}^e - \omega_e L_s i_{qs}^e \\ v_{qs}^e = R_s i_{qs}^e + L_s \frac{d}{dt} i_{qs}^e + \omega_e (L_s i_{ds}^e + \lambda_{mf}) \end{cases} \quad (2.59)$$

而對應於(2.56)式之電磁轉矩式則變成：

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{3}{2} \frac{p}{2} \lambda_{mf} i_{qs}^e \\ &= K i_{qs}^e \end{aligned} \quad (2.60)$$

其中 K 為常數

由(2.60)式可看出，表面黏著型永磁同步馬達之電磁轉矩和直流馬達的轉矩相比較可說具有一樣的驅動特性。

最後，吾人將以上述表面黏著永磁同步馬達之數學模型為基礎，推導線型永磁馬達之數學模型。同樣地，以下所推導之線型永磁馬達之數學模式，亦是假設其為理想的線型永磁馬達，亦同樣忽略其鐵損，磁飽和效應，無槽與邊緣效應，並假設只有二磁極。因此，吾人可利用(2.7)與(2.8)式直接代入(2.59)式，獲得如下電氣系統模式：

$$\begin{cases} v_{ds}^e = R_s i_{ds}^e + L_s \frac{d}{dt} i_{ds}^e - \frac{\pi}{\tau} v L_s i_{qs}^e \\ v_{qs}^e = R_s i_{qs}^e + L_s \frac{d}{dt} i_{qs}^e + \frac{\pi}{\tau} v (L_s i_{ds}^e + \lambda_{mf}) \end{cases} \quad (2.61)$$

而其等效電路則如圖 2.12 所示。

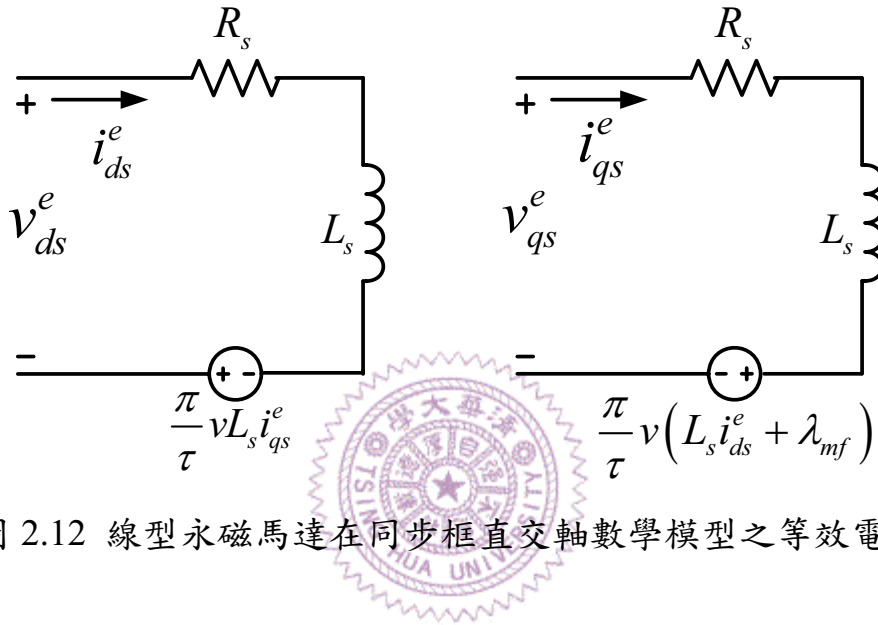


圖 2.12 線型永磁馬達在同步框直交軸數學模型之等效電路

至於機械系統之模式，吾人可將 $P=2$ 及(2.7)、(2.8)式代入(2.60)式，並引入直線運動之機械方程式，獲得如下之結果：

$$\begin{aligned} F_e &= \frac{3}{2} \frac{\pi}{\tau} \lambda_{mf} i_{qs}^e = K_l i_{qs}^e \\ &= M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + F_{load} \\ &= M \frac{dv}{dt} + Bv + F_{load} \end{aligned} \quad (2.62)$$

上式中各變數或參數意義如下：

- M : 動子質量
- B : 摩擦黏滯係數
- x : 動子位置
- v : 動子速度

K_l : 常數

F_e : 線性馬達所產生之推力

F_{load} : 負載推力

由(2.62)式可知，線型永磁馬達之電磁推力(F_e)與交軸電流(i_{qs})成比例，所以吾人只須控制交軸電流之輸入量，即可控制線型馬達之推力。

吾人可利用上述所推導之線型永磁馬達數學模型，做數學模擬及定結構滑模控制器之設計，這些將會在第三章中詳細加以說明。

