

## 附 錄

**A.1**  $(n, p, q)$ -設計與  $(n, n - p, n - 1 - q)$ -設計對稱於

$$A = \frac{n-1}{2}$$

**定理 A.1.** 若將  $(n, p, q)$ -設計對  $A = \frac{n-1}{2}$  鏡射可得  $(n, n - p, n - 1 - q)$ -設計。

**證明 A.1.** 假設  $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$  為  $(n, p, q)$ -設計中任意不同的兩點, 故可得下列兩公式

$$A_1 + pB_1 = nK_1 + q \quad (\text{A.1})$$

$$A_2 + pB_2 = nK_2 + q \quad (\text{A.2})$$

首先我們將  $(A_1, B_1)$  對  $A = \frac{n-1}{2}$  鏡射代入  $(n, n - p, q^*)$ -設計可得 (A.3) 式,

$(A_2, B_2)$  對  $A = \frac{n-1}{2}$  鏡射代入  $(n, n - p, q^{**})$ -設計可得 (A.4) 式

$$(n - 1 - A_1) + (n - p)B_1 = nL_1 + q^* \quad (\text{A.3})$$

$$(n - 1 - A_2) + (n - p)B_2 = nL_2 + q^{**} \quad (\text{A.4})$$

由 (A.3)式可知

$$q^* = (n - 1 - (A_1 + pB_1)) + n(B_1 - L_1) \quad (\text{A.5})$$

將 (A.5) 式與 (A.3) 式同除與  $n$  可知,  $q^* = n - 1 - q$ 。接著只需證  $q^{**} = n - 1 - q$  即得證。由 (A.1)、(A.2) 式可知

$$q = A_1 + pB_1 - nK_1 = A_2 + pB_2 - nK_2 \quad (\text{A.6})$$

將  $A_2$  改寫為下式

$$A_2 = A_1 - (pB_2 - nK_2 - pB_1 + nK_1)$$

於是

$$\begin{aligned} q^{**} &= (n - 1 - A_2) + (n - p)B_2 - nL_2 \\ &= (n - 1 - A_1 + (pB_2 - nK_2 - pB_1 + nK_1)) + (n - p)B_2 - nL_2 \\ &= (n - 1 - (A_1 + pB_1)) + n(B_2 + K_1 - K_2 - L_2) \\ &= (n - 1 - q) \end{aligned}$$



■

## A.2 $(n, p, q)$ -設計與 $(n, p', q')$ -設計對稱於 $A = B$

由 (3.1) 式可知

$$A + pB = q \pmod{n} \quad (\text{A.7})$$

將 (A.7) 式等號兩邊皆乘上  $p'$ , 可得

$$p' \cdot A + p \cdot p' B = p' \cdot q \pmod{n} \quad (\text{A.8})$$

由 (A.8) 式可知, 若限制  $p \cdot p' = 1$ , 在對  $A = B$  鏡射可得

$$A + p' B = p' q \pmod{n} \quad (\text{A.9})$$

即對應  $(n, p', q')$ -設計。

### A.3 標準線斜率爲正，標準線與 $a, b$ 關係之推導

當標準線斜率爲正時的情況：我們將標準線之方程式表示如下：

$$aA - bB = n \cdot k + q,$$

其中  $k \in Z; q = 0, \dots, n-1$ 。移項可得

$$aA = n \cdot k + q + bB。$$

因爲  $A \in \{0, \dots, n-1\}$ , 故

$$0 \leq n \cdot k + q + bB \leq a(n-1)。$$

因  $B \in \{0, \dots, n-1\}$ , 可得知

$$-b(n-1) \leq n \cdot k + q \leq a(n-1)。 \quad (\text{A.10})$$

每一個滿足 (A.10) 式的  $k$  值, 即對應到一條標準線, 故滿足 (3.3) 式的  $k$  值個數便是通過建模區間的標準線個數。並且當  $a(n-1) + b(n-1)$ , 即  $a+b$  越大, 則標準線將越多。因爲

$$\frac{-b(n-1) - q}{n} \leq k \leq \frac{(a)(n-1) - q}{n} \quad (\text{A.11})$$

由 (A.11) 式可知共有  $(\lceil \frac{(a+b)(n-1)-q}{n} \rceil + 1)$  個  $k$ , 所以將會有  $(a+b)$  或  $(a+b-1)$  條標準線。由此推導我們一樣可得 2 個結論

1  $a+b$  越大代表標準線越多

2 會有  $a+b$  或者  $a+b-1$  條標準線, 隨著餘數不同而有變化

## A.4 水準數奇數時，滿足線性效應彼此間且其與二次效應正交性之推導

若要使得線性效應  $r_l$  隨著極軸改變時皆維持與  $\theta_{l_u}$  之間的正交性，須滿足

$$\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = 0, \quad \forall u = \theta_{l_{(k)}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

以下我們將一一討論當  $u$  為最小的  $\theta_l = \theta_{l_{(1)}}$  至最大的  $\theta_l = \theta_{l_{(n)}}$  的情形。

- 當  $u = \theta_{l_{(1)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} = 0$

- 當  $u = \theta_{l_{(2)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + C) + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + D) + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + D) + \dots + r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + D)$

$$= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + C r_{l_1} + D(r_{l_2} + r_{l_3} + \dots + r_{l_n})$$

$$= (C - D) r_{l_1}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(3)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + C) + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + C) + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + D) + \dots + r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + D)$

$$= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + C(r_{l_1} + r_{l_2}) + D(r_{l_3} + \dots + r_{l_n})$$

$$= (C - D)(r_{l_1} + r_{l_2})$$

- 當  $u = \theta_{l_{(4)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + C) + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + C) + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + C) + r_{l_4}(\theta_{l_{(4)}} + D) + \dots + r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + D)$

$$= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + C(r_{l_1} + r_{l_2} + r_{l_3}) + D(r_{l_4} + r_{l_5} + \dots + r_{l_n})$$

$$= (C - D)(r_{l_1} + r_{l_2} + r_{l_3})$$

依比類推, 可得

- 當  $u = \theta_{l_{(\frac{n+1}{2})}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + A) + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + A) + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + A) + \cdots$   
 $+ r_{l_{\frac{n-1}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n-1}{2})}} + A) + r_{l_{\frac{n+1}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n+1}{2})}} + B) +$   
 $\cdots + r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + B)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + B(r_{l_n} + r_{l_{n-1}} + \cdots + r_{l_{\frac{n+1}{2}}}) +$   
 $A(r_{l_{\frac{n-1}{2}}} + \cdots + r_{l_1})$   
 $= (B - A)(r_{l_n} + r_{l_{n-1}} + \cdots + r_{l_{\frac{n+1}{2}}})$

- 當  $u = \theta_{l_{(n-1)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + B) + r_{l_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + B) + r_{l_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} +$   
 $A) + \cdots + r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + A)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + B(r_{l_n} + r_{l_{n-1}}) + A(r_{l_{n-2}} + \cdots + r_{l_1})$   
 $= (B - A)(r_{l_n} + r_{l_{n-1}})$

- 當  $u = \theta_{l_{(n)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + B) + r_{l_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + A) + r_{l_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} +$   
 $A) + \cdots + r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + A)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + B(r_{l_n}) + A(r_{l_{n-1}} + r_{l_{n-2}} + \cdots + r_{l_1})$   
 $= (B - A)(r_{l_n})$

由以上推導, 故可得

- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}, j = 1, \cdots, \frac{n-1}{2}$  時,

$$\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = (C - D) \sum_{k=1}^{j-1} r_{l_k}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}, j = \frac{n+1}{2}, \dots, n$  時,

$$\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = (B - A) \sum_{k=j}^n r_{l_k}$$

爲了滿足更高次項 ( $r$  二次,  $\theta$  一次) 的正交性, 即滿足

$$\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = 0$$

我們將一一討論  $u$  爲  $\theta_{l_{(1)}}$  至  $\theta_{l_{(n)}}$  的情形。

- 當  $u = \theta_{l_{(1)}}, \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} = 0$

- 當  $u = \theta_{l_{(2)}}, \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + C) + r_{q_2}(\theta_{l_{(2)}} + D) + r_{q_3}(\theta_{l_{(3)}} + D) + \dots + r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + D)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + C r_{q_1} + D(r_{q_2} + r_{q_3} + \dots + r_{q_n})$   
 $= (C - D) r_{q_1}$

- 當  $u = \theta_{l_{(3)}}, \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + C) + r_{q_2}(\theta_{l_{(2)}} + C) + r_{q_3}(\theta_{l_{(3)}} + D) + \dots + r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + D)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + C(r_{q_1} + r_{q_2}) + D(r_{q_3} + \dots + r_{q_n})$   
 $= (C - D)(r_{q_1} + r_{q_2})$

- 當  $u = \theta_{l_{(4)}}, \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + C) + r_{q_2}(\theta_{l_{(2)}} + C) + r_{q_3}(\theta_{l_{(3)}} + C) + r_{q_4}(\theta_{l_{(4)}} + D) + \dots + r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + D)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + C(r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3}) + D(r_{q_4} + r_{q_5} + \dots + r_{q_n})$

$$= (C - D)(r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3})$$

⋮

- 當  $u = \theta_{l_{(\frac{n+1}{2})}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + A) + r_{q_2}(\theta_{l_{(2)}} + A) + r_{q_3}(\theta_{l_{(3)}} + A) + \cdots$   
 $+ r_{q_{\frac{n-1}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n-1}{2})}} + A) + r_{q_{\frac{n+1}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n+1}{2})}} + B) +$   
 $\cdots + r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + B)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + B(r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + \cdots + r_{q_{\frac{n+1}{2}}}) +$   
 $A(r_{q_{\frac{n-1}{2}}} + \cdots + r_{q_1})$   
 $= (B - A)(r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + \cdots + r_{q_{\frac{n+1}{2}}}) = (A -$   
 $B)(r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_{\frac{n-1}{2}}})$

- 當  $u = \theta_{l_{(n-1)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + B) + r_{q_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + B) + r_{q_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} +$   
 $A) + \cdots + r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + A)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{q_i} \theta_{l_{(k)}} + B(r_{q_n} + r_{q_{n-1}}) + A(r_{q_{n-2}} + \cdots + r_1)$   
 $= (B - A)(r_{q_n} + r_{q_{n-1}}) = (A - B)(r_{q_1} + r_{q_2})$

- 當  $u = \theta_{l_{(n)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + B) + r_{q_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + A) + r_{q_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} +$   
 $A) + \cdots + r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + A)$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + B(r_{q_n}) + A(r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}} + \cdots + r_{q_1})$   
 $= (B - A)(r_{q_n}) = (A - B)(r_{q_1})$

由以上推導, 故可得

- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}, j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$  時,

$$\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = (C - D) \sum_{k=1}^{j-1} r_{q_k}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}, j = \frac{n+1}{2}, \dots, n$  時,

$$\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = (B - A) \sum_{k=j}^n r_{q_k}$$

所以當  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = 0, \forall u$ , 必需滿足以下式子:

$$(C - D)r_{q_1} = 0 \Rightarrow r_{q_1} = 0$$

$$(C - D)(r_{q_1} + r_{q_2}) = 0 \Rightarrow r_{q_1} + r_{q_2} = 0$$

$$(C - D)(r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3}) = 0 \Rightarrow r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3} = 0$$

$\vdots$

$$(B - A)(r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + \dots + r_{q_{\frac{(n+1)}{2}}}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}} + \dots + r_{q_{\frac{(n+1)}{2}}} = 0$$

$\vdots$

$$(B - A)(r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}} = 0$$

$$(B - A)(r_{q_n} + r_{q_{n-1}}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} + r_{q_{n-1}} = 0$$

$$(B - A)(r_{q_n}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} = 0$$

即必須要  $r_{q_1} = r_{q_2} = r_{q_3} = r_{q_4} = \dots = r_{q_n} = 0$ 。因此  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = 0, \forall u$ , 是不可行的  
所以我們再將條件放寬為

$$\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} \approx 0$$

則改變限制為下式

$$r_{q_1} \approx 0$$

$$r_{q_1} + r_{q_2} \approx 0$$

$$r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3} \approx 0$$



$\vdots$

$$r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3} + \cdots + r_{\frac{(n-3)}{2}} + r_{\frac{(n-1)}{2}} \approx 0$$

$$r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}} + \cdots + r_{q_{\frac{(n+1)}{2}}} \approx 0$$

$\vdots$

$$r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}} \approx 0$$

$$r_{q_n} + r_{q_{n-1}} \approx 0$$

$$r_{q_n} \approx 0$$

我們將逐次控制這些限制式，作為挑選實驗點的方法，步驟請參照本文。



## A.5 水準數偶數時，滿足線性效應彼此間且其與二次效應正交性之推導

爲了方便計算，我們將  $f_2$  由簡便的符號表示：

$$A' = (n - 1) - u + 2$$

$$B' = -(n - 1) - u$$

$$C' = (n - 1) + |u| + 2$$

$$D' = -(n - 1) + |u|$$

因此  $f_1$  可重新表示爲

$$f_1(\theta_l) = \begin{cases} \theta_{l_i} + A', & \text{if } u \geq 0 \text{ and } \theta_{l_i} < u \\ \theta_{l_i} + B', & \text{if } \theta_{l_i} \geq u \geq 0 \\ \theta_{l_i} + C', & \text{if } \theta_{l_i} < u < 0 \\ \theta_{l_i} + D', & \text{if } u < 0 \text{ and } \theta_{l_i} \geq u \end{cases}$$

另外  $A', B', C', D'$  間存在以下關係， $A' - B' = 2n$  且  $B' - A' = -2n$ ， $C' - D' = 2n$ 。

若要滿足主效應  $r_l$  隨著極軸改變的  $\theta_{l_u}$  之間的正交性，須滿足。

$$\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = 0, \quad \forall u = \theta_{l_{(k)}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

以下我們將一一討論當  $u$  爲最小的  $\theta_l = \theta_{l_{(1)}}$  至最大的  $\theta_l = \theta_{l_{(n)}}$  的情形。

- 當  $u = \theta_{l_{(1)}}$ ， $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} = 0$
- 當  $u = \theta_{l_{(2)}}$ ， $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + D') + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + D') + \dots r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + D')$   

$$= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + C' r_{l_1} + D'(r_{l_2} + r_{l_3} + \dots + r_{l_n})$$
  

$$= (C' - D') r_{l_1}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(3)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + C') + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + D') + \cdots r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + D')$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + C'(r_{l_1} + r_{l_2}) + D'(r_{l_3} + \cdots + r_{l_n})$   
 $= (C' - D')(r_{l_1} + r_{l_2})$

- 當  $u = \theta_{l_{(4)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + C') + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + C') + r_{l_4}(\theta_{l_{(4)}} + D') + \cdots r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + D')$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + C'(r_{l_1} + r_{l_2} + r_{l_3}) + D'(r_{l_4} + r_{l_5} + \cdots + r_{l_n})$   
 $= (C' - D')(r_{l_1} + r_{l_2} + r_{l_3})$

- 當  $u = \theta_{l_{(\frac{n}{2})}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + C') + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + C') + \cdots + r_{l_{\frac{n}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n}{2})}} + D') + r_{l_{\frac{n+2}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n+2}{2})}} + D') + \cdots + r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + D')$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + C'(r_{l_1} + r_{l_2} + \cdots + r_{l_{\frac{n-2}{2}}}) + D'(r_{l_{\frac{n}{2}}} + \cdots + r_{l_n})$   
 $= (C' - D')(r_{l_1} + r_{l_2} + \cdots + r_{l_{\frac{n-2}{2}}})$

依比類推, 可得

- 當  $u = \theta_{l_{(\frac{n+2}{2})}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + A') + r_{l_2}(\theta_{l_{(2)}} + A') + r_{l_3}(\theta_{l_{(3)}} + A') + \cdots + r_{l_{\frac{n}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n}{2})}} + A) + r_{l_{\frac{n+2}{2}}}(\theta_{l_{(\frac{n+2}{2})}} + B') + \cdots + r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + B')$   
 $= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + B'(r_{l_n} + r_{l_{n-1}} + \cdots + r_{l_{\frac{n}{2}}}) + A'(r_{l_{\frac{n-1}{2}}} + \cdots + r_{l_1})$   
 $= (B' - A')(r_{l_n} + r_{l_{n-1}} + \cdots + r_{l_{\frac{n}{2}}})$

- 當  $u = \theta_{l_{(n-1)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + B') + r_{l_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + B') + r_{l_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} + A') + \cdots + r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + A')$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + B'(r_{l_n} + r_{l_{n-1}}) + A'(r_{l_{n-2}} + \cdots + r_{l_1}) \\
&= (B' - A')(r_{l_n} + r_{l_{n-1}})
\end{aligned}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(n)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{l_n}(\theta_{l_{(n)}} + B') + r_{l_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + A') + r_{l_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} + A') + \cdots + r_{l_1}(\theta_{l_{(1)}} + A')$   

$$= \sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{(k)}} + B'(r_{l_n}) + A'(r_{l_{n-1}} + r_{l_{n-2}} + \cdots + r_{l_1})$$
  

$$= (B' - A')(r_{l_n})$$

由以上推導, 故可得

- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}$ ,  $j = 1, \cdots, \frac{n}{2}$  時,  

$$\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = (C' - D') \sum_{k=1}^{j-1} r_{l_k}$$
- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}$ ,  $j = \frac{n}{2}, \cdots, n$  時,  

$$\sum_{k=1}^n r_{l_k} \theta_{l_{u_k}} = (B' - A') \sum_{k=j}^n r_{l_k}$$

爲了滿足更高次項的正交性, 即滿足

$$\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = 0$$

我們將一一討論  $u$  爲  $\theta_{l_{(1)}}$  至  $\theta_{l_{(n)}}$  的情形。

- 當  $u = \theta_{l_{(1)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} = 0$
- 當  $u = \theta_{l_{(2)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{q_2}(\theta_{l_{(2)}} + D') + r_{q_3}(\theta_{l_{(3)}} + D') + \cdots + r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + D')$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + C' r_{q_1} + D' (r_{q_2} + r_{q_3} + \cdots + r_{q_n}) \\
&= (C' - D') r_{q_1}
\end{aligned}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(3)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1} (\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{q_2} (\theta_{l_{(2)}} + C') + r_{q_3} (\theta_{l_{(3)}} + D') + \cdots r_{q_n} (\theta_{l_{(n)}} + D')$ 

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + C' (r_{q_1} + r_{q_2}) + D' (r_{q_3} + \cdots + r_{q_n}) \\
&= (C' - D') (r_{q_1} + r_{q_2})
\end{aligned}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(4)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1} (\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{q_2} (\theta_{l_{(2)}} + C') + r_{q_3} (\theta_{l_{(3)}} + C') + r_{q_4} (\theta_{l_{(4)}} + D') + \cdots + r_{q_n} (\theta_{l_{(n)}} + D')$ 

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + C' (r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3}) + D' (r_{q_4} + r_{q_5} + \cdots + r_{q_n}) \\
&= (C' - D') (r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3})
\end{aligned}$$

依比類推, 可得

- 當  $u = \theta_{l_{(\frac{n}{2})}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1} (\theta_{l_{(1)}} + C') + r_{q_2} (\theta_{l_{(2)}} + C') + r_{q_3} (\theta_{l_{(3)}} + C') + \cdots + r_{q_{\frac{n}{2}}} (\theta_{l_{(\frac{n}{2})}} + D') + r_{q_{\frac{n+2}{2}}} (\theta_{l_{(\frac{n+2}{2})}} + D') + \cdots + r_{q_n} (\theta_{l_{(n)}} + D')$ 

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + C' (r_{q_1} + r_{q_2} + \cdots + r_{q_{\frac{n-2}{2}}}) + D' (r_{q_{\frac{n}{2}}} + \cdots + r_{q_n}) \\
&= (C' - D') (r_{q_1} + r_{q_2} + \cdots + r_{q_{\frac{n-2}{2}}})
\end{aligned}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(\frac{n+2}{2})}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_1} (\theta_{l_{(1)}} + A') + r_{q_2} (\theta_{l_{(2)}} + A') + r_{q_3} (\theta_{l_{(3)}} + A') + \cdots + r_{q_{\frac{n-2}{2}}} (\theta_{l_{(\frac{n-1}{2})}} + A') + r_{q_{\frac{n+2}{2}}} (\theta_{l_{(\frac{n+1}{2})}} + B') + \cdots + r_{q_n} (\theta_{l_{(n)}} + B')$ 

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + B' (r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + \cdots + r_{q_{\frac{n}{2}}}) + A' (r_{q_{\frac{n-2}{2}}} + \cdots + r_{q_1})
\end{aligned}$$

$$= (B' - A')(r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + \cdots + r_{q_{\frac{n}{2}}})$$

- 當  $u = \theta_{l_{(n-1)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + B') + r_{q_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + B') + r_{q_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} + A') + \cdots + r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + A')$   

$$= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + B'(r_{q_n} + r_{q_{n-1}}) + A'(r_{q_{n-2}} + \cdots + r_{q_1})$$
  

$$= (B' - A')(r_{q_n} + r_{q_{n-1}})$$

- 當  $u = \theta_{l_{(n)}}$ ,  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = r_{q_n}(\theta_{l_{(n)}} + B') + r_{q_{n-1}}(\theta_{l_{(n-1)}} + A') + r_{q_{n-2}}(\theta_{l_{(n-2)}} + A') + \cdots + r_{q_1}(\theta_{l_{(1)}} + A')$   

$$= \sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{(k)}} + B'(r_{q_n}) + A'(r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}} + \cdots + r_{q_1})$$
  

$$= (B' - A')(r_{q_n})$$

由以上推導, 故可得

- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}, j = 1, \cdots, \frac{n}{2}$  時,  

$$\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = (C' - D') \sum_{k=1}^{j-1} r_{q_k}$$

- 當  $u = \theta_{l_{(j)}}, j = \frac{n}{2}, \cdots, n$  時,

$$\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = (B' - A') \sum_{k=j}^n r_{q_k}$$

所以當  $\sum_{k=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = 0, \forall u$ , 必需滿足以下式子:

$$(C' - D')r_{q_1} = 0 \Rightarrow r_{q_1} = 0$$

$$(C' - D')(r_{q_1} + r_{q_2}) = 0 \Rightarrow r_{q_1} + r_{q_2} = 0$$

$$(C' - D')(r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3}) = 0 \Rightarrow r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3} = 0$$

$\vdots$

$$(B' - A')(r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + \cdots + r_{q_{\frac{n}{2}}}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} + r_{q_{n-1}} + r_{q_{n-2}} + \cdots + r_{q_{\frac{n}{2}}} = 0$$

$\vdots$

$$(B' - A')(r_{q_n} + r_{q_n-1} + r_{q_n-2}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} + r_{q_n-1} + r_{q_n-2} = 0$$

$$(B' - A')(r_{q_n} + r_{q_n-1}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} + r_{q_n-1} = 0$$

$$(B' - A')(r_{q_n}) = 0 \Rightarrow r_{q_n} = 0$$

即必須要  $r_{q_1} = r_{q_2} = r_{q_3} = r_{q_4} = \dots = r_{q_n} = 0$ 。因此  $\sum_{i=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} = 0, \forall u$ , 是不可行的所以我們再將條件放寬為

$$\sum_{i=1}^n r_{q_k} \theta_{l_{u_k}} \approx 0$$

則改變限制為下式

$$r_{q_1} \approx 0$$

$$r_{q_1} + r_{q_2} \approx 0$$

$$r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3} \approx 0$$

$$\vdots$$

$$r_{q_1} + r_{q_2} + r_{q_3} + \dots + r_{\frac{(n-4)}{2}} + r_{\frac{(n-2)}{2}} \approx 0$$

$$r_{q_n} + r_{q_n-1} + r_{q_n-2} + \dots + r_{q_{\frac{(n)}{2}}} \approx 0$$

$$\vdots$$

$$r_{q_n} + r_{q_n-1} + r_{q_n-2} \approx 0$$

$$r_{q_n} + r_{q_n-1} \approx 0$$

$$r_{q_n} \approx 0$$

我們將逐步控制限制式, 作為挑選實驗點的方法。步驟同奇數的水準數, 請參照本文。