L3 極限(Limit)的數學建模

在每一個科目裡，都有一個規定。學科本來就是離開生活，例如手機的原理是什麼？手機是生活常用的，但卻講不出來原理。知識是遠離生活的，它的對與錯，不是由生活經驗判斷，必須由學科的規定判斷。

科學裡頭的規定，叫定義。對待定義的態度要正確，不會去問定義爲什麼對錯？而會去問爲什麼這樣訂？定義是要一字不漏記下來，就像九九乘法表，一共有 81 個，每一個都要記下來。每一條都會影響判斷的對與錯，兩條規定得到的結果，跟一條得到的不太一樣。

By the way~筆記的完整性是學習最重要的夥伴。

給一個函數就可以問 $\lim(x\to c)f(x)$=?找到答案是根據畫圖，但在數學上，畫圖不算是證明，它只是一個輔助工具。

這個問題本身不需要圖形。我有函數，圖形也不一定畫的出來。

By the way~解決問題的辦法，有步驟，而不是答案。

蒐集想法 圖形→現象→口語→數學 思想上的組織。

第一個 這個問題本身不牽涉到圖形。

第二個 就算有函數，圖形也不一定畫的出來。

L3 極限(Limit)的數學建模

下一個問題如果不行畫圖，如何知道答案呢？

Question:如何不透過畫圖而能算出或得到 $\lim_{x\to c} f(x)=L$?

Answer:要能做到此事，必須將極限問題在圖形上看到的現象，用數學表達出，即找到它的數學建模。(把口語上表達的現象，表達成數學)。

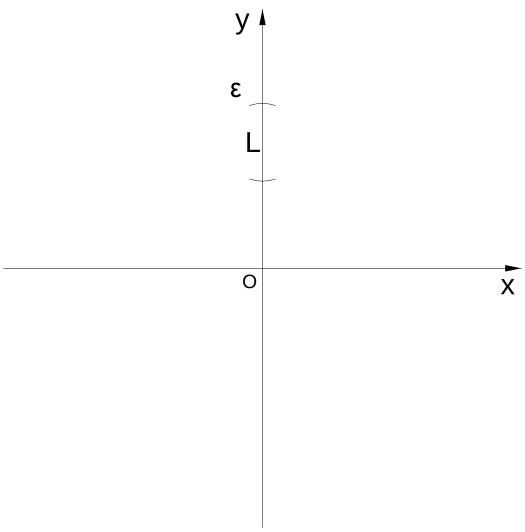
By the way 數學建模是數學系必備工具。

即下討論：

step1:討論趨近的問題？

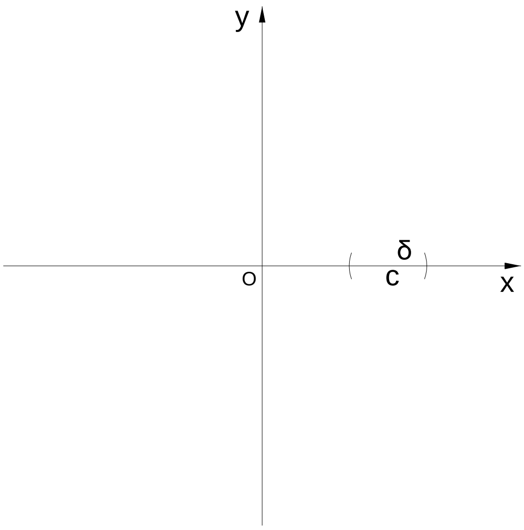
趨近=逼近=要多(靠近)有多靠近。在「$\lim_{x\to c} f(x)=L$」下，有兩個趨近要討論。

① 用 ε 靠近來表示在y軸上函數值f(x)與L的靠近(在數學上有，$|f(x)-L|<\varepsilon$ 因為有正差距跟負差距，所以加上絕對值)，圖形上為



L3 極限(Limit)的數學建模

② 用δ靠近來表示在x軸上自變數x與c的靠近(在數學上有 $0<|x-c|<\delta$)，圖形上為



趨近來講x會不會走到c？不會，永遠不會等於c，所以加上 $0<$

Q:此二靠近的關係為何？ (可以問先後關係 or 對應關係)

A:「對 ε 靠近，由(意會=有=存在有) δ 靠近來完成」。(f(x)跟 L 有多靠近，透過 x 靠近 c 達成的。)

step2:「加入要多靠近(+有多靠近) 」

「對 ε 靠近+要多靠近有多靠近，改成皆由 δ 靠近來完成」。

怎麼改？要多靠近有多靠近，它是一個動態，也就是每一個靠近。

① 對「每一個」ε靠近，皆存在有δ靠近來完成。

「對 ε 靠近要多靠近有多靠近，皆由 δ 靠近+要多靠近有多靠近來完成來完成什麼？」。

L3 極限(Limit)的數學建模

怎麼改？當 x 逼近於 c，這是一個條件，也就是要求 x 要逼近於 c，

δ 靠近完成 ε 靠近。對 δ 靠近，事實上是每一個點都要滿足 ε 靠近。

② 對「每一個」ε 靠近，皆存在有 δ 靠近，使得對每一個x在 $0<|x-c|<\delta$ 改成皆滿足 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 。

都完成

Def:

①「每一個」在數學記成∀，即「對每一個=倒A=for any」

②「存在有」在數學記成∃，即「存在有=倒E」

備註：靠近在數學上表示是什麼？

靠近在數學上表示是距離(口語講靠近，數學講距離)，

距離如何表示？

距離在數學上，若且唯若對應到正數，故 ε 靠近可以用 $\varepsilon>0$, δ 靠近可以用 $\delta>0$

靠近→距離→正數

step3:總結所得: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$，such that $\forall x$ in $0<|x-c|<\delta$ ，(Note:在英文中，「都滿足」，而自動隱含) $|f(x)-L)|<\varepsilon$ 。

——此為 $\lim(x\to c)f(x)=L$ 的數學建模。找到對應的數學建模，將此現象定為數學上的定義。圖形上這是一個動態，轉成數學還是動態。

L3 極限(Limit)的數學建模

Def:We say that $\boxed{\lim_{x \to c} f(x)=L}$,

$\boxed{\text{if } \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \text{ such that } \forall x \text{ in } 0<|x-c|<\delta, |f(x)-L|<\varepsilon.}$

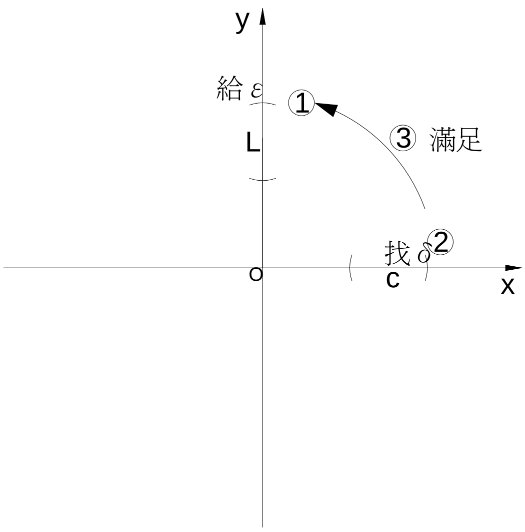
(Note:在英文中，「都滿足」，自動隱含)

By the way~這是一個思想的總集。

我們說極限存在，if 成立。這個時候不能說圖形成立，而極限存在，

要依數學建模成立。

證明數學建模的成立，就說極限的等式成立。在圖形為



lim(x→a)g(x)=M 我們練習說？We~~,if~~.

eg:1　Show that lim(x→2)3x=6?

proof if~~

去證給 $\varepsilon>0$ 去找到 $\delta>0$ 使得 such that 在此區間 $0<|x-c|<\delta$ 內的所有

點 x 會滿足不等式 $|f(x)-L|<\varepsilon$ 。